N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THÈSE DE DOCTEUR INGÉNIEUR PHYSIQUE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

ERIC DE BAZELAIRE

pour obtenir

le grade de DOCTEUR INGÉNIEUR

SUJET DE LA THÈSE :

PHOTOÉLASTICIMÉTRIE PAR HOLOGRAPHIE ET POLARIMÉTRIE

Soutenue le 26 MAI 1972 *1972 devant la Commission d'Examen*

Président : M. M. FRANÇON

Examinateurs : MM. J.E. BLAMONT
J.C. VIENOT
F. TEISSIER du CROS

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THÈSE DE DOCTEUR INGÉNIEUR PHYSIQUE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

ERIC DE BAZELAIRE

pour obtenir

le grade de DOCTEUR INGÉNIEUR

SUJET DE LA THÈSE :

PHOTOÉLASTICIMÉTRIE PAR HOLOGRAPHIE ET POLARIMÉTRIE

Soutenue le *1972 devant la Commission d'Examen*

Président : M. M. FRANÇON
Examinateurs : MM. J.E. BLAMONT
J.C. VIENOT
F. TEISSIER du CROS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mes parents.

.../

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547101_0034

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Optique et de Physique Moléculaire de l'Ecole Polytechnique en liaison avec le Service Technique des Constructions et Armes Navales et le Laboratoire d'Optique de la Faculté des Sciences de Besançon.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur J.E. BLAMONT qui à bien voulu patronner ma thèse, ainsi que Monsieur le Professeur J.C. VIENOT et Monsieur l'Ingénieur en chef A. ROBERT qui m'ont prodigué de nombreux conseils tout au long de cette étude.

Je remercie tout spécialement Messieurs TEISSIER du CROS directeur du Laboratoire O.P.M., J.R. HURIET et B. PRADE pour le soutien très précieux que j'ai trouvé auprés d'eux.

La compétence de Messieurs BOURDON, FERRE et LE GOER (S.T.C.A.N.) m'a été très précieuse pour la réalisation des travaux de polarimétrie : je les remercie de leur amicale collaboration.

Les travaux d'Holographie ont été réalisés grâce au concours de Messieurs MONNERET, BINDER et CHATELAIN (LOSE) : qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Monsieur ANDOQUE et Monsieur DUCROS, ainsi que les techniciens du laboratoire O.P.M. ont participé avec beaucoup de patience à la préparation pratique des manipulations: je les en remercie vivement.

Le service de Madame RODRIGUEZ s'est dévoué pour mener à bien la rédaction de ce rapport; qu'il sache que j'ai hautement apprécié son dévouement.

.../

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Optique et en Physique Moléculaire de l'Ecole Polytechnique en liaison avec le Service Technique des Constructions et Armes Navales et le Laboratoire d'Optique de la Faculté des Sciences de Besançon.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur J.C. BLANCHET qui a bien voulu patronner ma thèse, ainsi que Monsieur le Professeur J.C. VIENOT et Monsieur l'Ingénieur en chef A. ROBERT qui m'ont prodigué de nombreux conseils tout au long de cette étude.

Je remercie tout spécialement Messieurs TEISSIER du CNRS directeur du Laboratoire G.P.M., J.R. HURIET et S. FRAUD pour la section très précieux que j'ai trouvé auprès d'eux.

La compétence de Messieurs BOURDON, FERRE et L. GUEST (A.T.C.A.M.) m'a été très précieuse pour la réalisation des travaux de polarimétrie : je les remercie de leur amicale collaboration.

Les travaux d'Holographie ont été réalisés grâce au concours de Messieurs MONNERET, BIRMAN et CHATELAIN (LOSE) : qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Monsieur ANDRIEU et Monsieur BUSROS, ainsi que les techniciens du laboratoire G.P.M. ont participé avec beaucoup de patience à la préparation pratique des manipulations : je les en remercie vivement.

Le service de Madame RODRIGUEZ s'est dévoué pour mener à bien la rédaction de ce rapport ; qu'il sache que j'ai hautement apprécié son dévouement.

...

Cette étude entrait dans le cadre de deux conventions D.R.M.E., je suis très reconnaissant du soutien de cet organisme, et je remercie en particulier le Colonel H. FUERXER, Chef adjoint du Groupe 3 et Monsieur A. BRETHON Chef de la Division Optique, sans l'aide desquels elle n'aurait pu être effectuée.

.../

E R R A T A

P. 7 - utilisée au <u>début du</u> siècle

P. 14 - $e' = e\,(1 + \frac{\delta e}{e})$

P. 15 - $\vec{D}$ l'induction Electro-Magnétique

P. 16 - ($\epsilon_i = n_i^2$)(Formule limite quand $\nu \to o$, appliquable cependant pour les corps utilisés)

P. 22 - $d.\Delta u \gg \frac{\lambda}{4\pi}$

P. 23 - $\epsilon_1 = \epsilon_x \sin(\omega\tau - \psi x)$
$\epsilon_2 = \epsilon_y \sin(\omega\tau - \psi y)$

P. 26 - <u>Envoyons</u> sur le point O

P. 29 - les vecteurs de Stokes <u>déterminent en particulier</u> les formes de lumière.

P. 37 - Cette <u>dernière</u> consiste à .....

P. 41 - Un peu plus faible que la <u>différence de chemins optiques</u> AB,

P. 54 - Clichés communiqués par MM. DUC et THEVAL du laboratoire MANDEL, Ecole Polytechnique.

P. 64 - (Relation (70) valable pour un écran totalement absorbant)

P. 79 - $I = \frac{I_o}{4}\left[1 + 2\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\cos \ldots\ldots\right.$

P.107 - Tout se passe comme si .....

P.112 - $I_{90} = 1 + \cos\left[\theta - \alpha - \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_o}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_o}{2}\right)$

P.114 - L'objet étant <u>chargé</u>.

P.120 - ligne 6 à remplacer par : Les paramètres mesurés sont : la
ligne 10 : Méthode inventé par A. ROBERT
ligne 13 : aplatissement

P.129 - trois paramètres de directions des contraintes principales

P.133 - ligne 20 : caractéristiques
ligne 21 : cette méthode a été inventée et développée par A.ROBERT

P.139 - C'est à dire de <u>calculer le déviateur des</u> contraintes

P.147 - lignes 2, 3, 5 et 7, remplacer les ϵ par des e

P.156 - lignes 1, 2, et 12, lire : Stokes

TABLE des MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

I. INTRODUCTION

II. RAPPELS THEORIQUES

II.1. Notions d'élasticité

II.1.1. Le tenseur des contraintes

. II.1.1.1. - Définitions, notations

. II.1.1.2. - La quadrique des contraintes

. II.1.1.3. - Différentes formes de contraintes

II.1.2. Relation entre les contraintes et les déformations

. II.1.2.1. - Le tenseur des déformations

. II.1.2.2. - Loi de Hooke

. II.1.2.3. - Cas d'un corps isotrope

. II.1.2.4. - Corps isotrope soumis à une contrainte biaxiale

II.2. Optique des milieux anisotropes

II.2.1. Introduction

II.2.2. Surface des indices

II.2.3. Propriété de l'ellipsoïde des indices

II.2.4. Classification des milieux anisotropes

II.2.5. Biréfringence des milieux anisotropes

II.3. Théorie de la photoélasticité

II.3.1. Effet photoélastique

II.3.2. Cas des corps isotropes

II.3.3. Corps isotropes soumis à une contrainte biaxiale

.../

II.4. Notions de polarimétrie

II.4.1. Propagation de la lumière
II.4.2. Sphère de Poincaré et applications
II.4.3. Espace de Mueller

III. DIVERSES METHODES NON OPTIQUES de MESURE des CONTRAINTES

III.1. Généralités

III.2. Conditions de mesure des contraintes

III.3. Conditions d'essais des constructions

III.4. Apperçu sur les appareils utilisés

III.4.1. Utilisation d'un tensiomètre
III.4.2. Capteurs de résistances
III.4.3. Méthode de vernissage
III.4.4. Mesure aux rayons X

IV. METHODES OPTIQUES de MESURE des CONTRAINTES

IV.1. Echantillon transparent bidimensionnel

IV.1.1. Le moiré de Dantu
IV.1.2. Photoélasticimétrie classique

. IV.1.2.1. - Isochromes
. IV.1.2.2. - Isopaches
. IV.1.2.3. - Séparation des contraintes

IV.1.3. Photoélasticimétrie classique améliorée

. IV.1.3.1. - Amélioration du matériau utilisé
. IV.1.3.2. - Amincissement des isochromes
. IV.1.3.3. - Multiplication des isochromes

.../

IV.1.4. Méthodes interférométriques

.IV.1.4.1. - Méthode par simple exposition

IV.1.4.1.1. Analyse des réseaux obtenus

IV.1.4.1.2. Réseaux composants

.IV.1.4.2. - Méthode par double exposition

IV.1.4.2.1. Phénomène de moirure

IV.1.4.2.2. Enregistrement des moirés

IV.1.5. Méthodes holographiques

.IV.1.5.1. - Méthode par simple exposition

IV.1.5.1.1. Isopaches en lumière diffuse

IV.1.5.1.2. Isoclines en lumière dirigée

.IV.1.5.2. - Méthode par double exposition

IV.1.5.2.1. Isopaches d'objets non photoélastiques

IV.1.5.2.2. Objets photoélastiques : isopaches et isochromes

IV.1.5.2.3. Analyse des réseaux obtenus

.IV.1.5.3. - Nouvelles méthodes holographiques

IV.1.5.3.1. Lasers non polarisés, lumière dirigée

IV.1.5.3.2. Isochromes par simple exposition

IV.1.5.3.2.1. Restitution classique avec laser

IV.1.5.3.2.2. Restitution en lumière blanche

IV.1.5.3.3. Double exposition : isochromes et isopaches

IV.1.5.3.4. Séparation de systèmes de franges : isopaches

IV.1.5.3.4.1. Double exposition avec pouvoir rotatoire objet chargé et non chargé

IV.1.5.3.4.2. Double exposition avec objet chargé, avec et sans pouvoir rotatoire

IV.1.5.3.5. Triple exposition : isochromes et isopaches séparées

.IV.1.5.4. - Montage réalisé

.../

IV.1.6. Méthode polarimétrique

. IV.1.6.1. - Mesure automatique des formes de lumière
. IV.1.6.2. - Ellipsomètre du type Robert
. IV.1.6.3. - Photoélasticimètre bidimentionnel par transmission

IV.2. Echantillon transparent tridimensionnel

IV.2.1. Source polarisée à l'intérieur d'un matériau
IV.2.2. Composition de deux biréfrigents
IV.2.3. Photoélasticimètre tridimensionnel

. IV.2.3.1. - Détermination des axes et du déphasage
. IV.2.3.2. - Réalisation de l'appareil de mesure

IV.3. Echantillon opaque ou structure réelle

IV.3.1. Mesure absolue de déplacements
IV.3.2. Photoélasticimétre par réflexion

. IV.3.2.1. - Photoélasticimètre classique par réflexion
. IV.3.2.2. - Photoélasticimètre par rèflexion sur vernis fins

V. PHOTOELASTICIMETRE par REFLEXION

V.1. Schéma de principe de l'appareil

V.1.1. La source S
V.1.2. L'ellipsomètre A-E
V.1.3. Le modèle M et son vernis V
V.1.4. Le système optique O

. V.1.4.1. - Première version du banc par réfloxion
. V.1.4.2. - Etude de l'opérateur de réflexion - transmission d'une lame semi-transparente
. V.1.4.3. - Deuxième version du banc par réfloxion
. V.1.4.4. - Troisième version du banc par reflexion

.../

V.2. Caractéristiques de l'appareil

V.2.1. Bilan énergétique

V.2.2. Pouvoir séparateur spatial

V.2.3. Sensibilité en déphasage φ

V.2.4. Résolution en direction α

V.2.5. Résolution temporelle

V.2.6. Remarque

V.3. Essais et résultats

V.3.1. Appareil à reflexion pure

V.3.2. Appareil à reflexion diffuse

.V.3.2.1. - Etude de la flexion circulaire

.V.3.2.2. - Etude d'une plaque sur deux appuis avec une charge au centre

.V.3.2.3. - Essai en traction pure

.V.3.2.4. - Conclusion sur les essais

V.4. Conclusion sur le photoélasticimètre par reflexion

VI. CONCLUSIONS GENERALES

.../

REPERTOIRE des PHOTOGRAPHIES

Photo n°	page	légende
1	32	Condition de mesure des constantes
2	54	Champ de franges à l'interféromètre (isopaches et isochromes)
3	73	Champ des isochromes en holographie diffuse
4	73	Image reconstituée en holographie diffuse
5	87	Microscopie des plaques
6	92	Isochromes en couleur
7	102	1er montage holographique de Besançon (vue générale)
8	102	1er montage holographique de Besançon (détail de la presse)
9	104	Isochromes et isopaches en couleur
10	113	Inversion du contraste des isochromes ($R<90°$, $R=90°$, $R > 90°$)
11	119	2ème montage holographique de Besançon (vue générale)
12	158	Photoélasticimètre par transmission avec opérateur objet
13	158	Opérateur objet
14	166	Opérateur identité
15	166	Banc par réflexion pure, (2ème montage)
16	171	Banc par réflexion diffuse (3ème montage)
17	171	Banc avec presse de la Marine

.../

I. INTRODUCTION

Les exigences techniques modernes sont telles que les bureaux d'études sont conduits à imaginer des systèmes dans lesquels les qualités des matériaux sont utilisées au maximum.

Ceci se vérifie particulièrement bien en ce qui concerne la mécanique où les techniques d'assemblages et les matériaux choisis sont une cause primordiale de succès.

En conséquence, les méthodes de mesure et les appareils correspondants ont du être sensiblement améliorés.

L'objet de ce rapport est de décrire quelques-unes de ces améliorations :

La première partie est une comparaison des différentes méthodes utilisables et de leurs performances. On y constate qu'une méthode privilégiée par la précision qu'on peut en attendre est la photoélasticimétrie, déjà utilisée au dixnouvième siècle par MESNAGER et récemment améliorée par l'introduction des méthodes de calcul de H. POINCARE par A.ROBERT (S.T.C.A.N. 1966)

Depuis quelques années, le développement des sources laser a permis l'utilisation du procédé d'enregistrement holographique imaginé par D.GABOR en 1948. On peut citer parmi les permières expériences, celles de TAYLOR et de J.Ch. VIENOT en 1965

La deuxième partie décrit les deux améliorations successives apportées d'une part à la méthode polarimètrique, d'autre part à la méthode holographique.

Ces travaux, éxécutés en collaboration avec le S.T.C.A.N. et la Faculté des Sciences de BESANÇON , m'ont permis d'approfondir mes connaissances sur ces deux techniques apparament rivales et d'en apprécier les qualités complémentaires.

En conclusion, je présente une technique nouvelle de polarimétrie holographique permettant d'exploiter simultanément les avantages des deux méthodes précédentes.

II. RAPPELS de la THEORIE

II.1. Notions d'élasticité

II.1.1. Le tenseur des contraintes

II.1.1.1. Définitions, notations

Considérons un système matériel continu - un corps solide par exemple - en équilibre à un instant donné.

Dans le cas le plus général il peut être soumis à diverses forces de deux espèces différentes. Les unes résultent de l'action sur lui d'autres systèmes matériels éloignés, ce sont les actions à distance (par exemple les forces de gravitation).

D'autre part, le système matériel peut être soumis à des forces appliquées en des points variés de son contour extérieur et d'orientation quelconque. On les appelle forces de contact. C'est sous l'influence de ces diverses actions que le solide envisagé est par hypothèse en équilibre.

Les systèmes matériels réels soumis à des forces subissent une déformation qui s'accompagne à l'intérieur même du corps, d'actions réciproques des divers éléments.

Ces actions se traduisent par l'apparition de "forces élastiques" que nous définirons comme étant la force par unité d'aire exercée sur un élément plan fictif par les éléments voisins.

.../

En théorie de l'élasticité, on appelle "contraintes" les actions intérieures ainsi définies ramenées à l'unité de surface lorsque la surface de l'élément considéré tend vers zéro.

L'élément plan fictif précédent sépare le corps en deux parties A et B.

Examinons l'action de B sur A. Soit $\vec{S}$ un vecteur porté par la normale à la surface où est appliqué la force $\vec{F}$, orienté de B vers A, et de module égal à l'aire de cette surface.

Le tenseur des contraintes σ est alors défini par la relation :

$$\vec{F} = \sigma . \vec{S} \qquad (1)$$

Rapportons l'espace à un système d'axes orthonormés. La relation (1) s'écrit, en projection sur ces axes :

$$F_i = \sigma_{ij} \times S_j \qquad (2)$$

i et j variant de 1 à 3, nous voyons alors que pour un corps quelconque une contrainte σ sera représentée par 9 composantes σ_{ij}.

Les coefficients σ_{ii} sont appelés composantes normales, les coefficients σ_{ij} $(i \neq j)$ composantes de cisaillement.

Si les couples de masse sont nuls, et si le corps est en équilibre, hypothèse que nous garderons dans toute la suite de l'exposé, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et le tenseur des contraintes est symétrique. On peut donc, par un changement d'axes, représenter σ par une matrice diagonale :

.../

En théorie de l'élasticité, on appelle "contraintes" les actions intérieures ainsi définies ramenées à l'unité de surface lorsque la surface de l'élément considéré tend vers zéro.

L'élément plan fictif précédent sépare le corps en deux parties A et B.

Examinons l'action de B sur A. Soit $\vec{S}$ un vecteur porté par la normale à la surface où est appliqué la force $\vec{F}$, orienté de B vers A, et de module égal à l'aire de cette surface.

Le tenseur des contraintes σ est alors défini par la relation :

$$\vec{F} = \sigma . \vec{S} \qquad (1)$$

Rapportons l'espace à un système d'axes orthonormés. La relation (1) s'écrit, en projection sur ces axes :

$$F_i = \sigma_{ij} \times S_j \qquad (2)$$

i et j variant de 1 à 3, nous voyons alors que pour un corps quelconque une contrainte σ sera représentée par 9 composantes σ_{ij}.

Les coefficients σ_{ii} sont appelés composantes normales, les coefficients σ_{ij} $(i \neq j)$ composantes de cisaillement.

Si les couples de masse sont nuls, et si le corps est en équilibre, hypothèse que nous garderons dans toute la suite de l'exposé, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et le tenseur des contraintes est symétrique. On peut donc, par un changement d'axes, représenter σ par une matrice diagonale :

.../

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

II.1.1.2. La quadrique des contraintes

Au tenseur σ, on peut associer une forme quadratique et l'équation

$$\sigma_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = \pm 1 \qquad (4)$$

représente une quadrique que l'on peut rapporter à ses axes principaux :

$$\sigma_1 \cdot x_1^2 + \sigma_2 \cdot x_2^2 + \sigma_3 \cdot x_3^2 = \pm 1 \qquad (5)$$

La grandeur des demi-axes est :

$$(\sigma_1)^{-\frac{1}{2}},\ (\sigma_2)^{-\frac{1}{2}},\ (\sigma_3)^{-\frac{1}{2}}$$

Si la forme (5) est positive, la quadrique est un ellipsoïde et autour du point considéré, il n'existe que des tractions.

Si la forme (5) est négative, la quadrique est encore un ellipsoïde et autour du point considéré, il n'existe que des compressions.

Si la forme (5) comporte une partie positive et une partie négative, il y a des éléments plans soumis à une traction et d'autres à une compression; la quadrique est un hyperboloïde à deux nappes.

.../

II.1.1.3. Différentes formes de contraintes

Voici quelques formes caractéristiques de contraintes rapportées à leurs axes principaux :

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p\delta_{ij} \qquad (6)$$

contrainte

uniaxiale biaxiale triaxiale pression hydrostatique

II.1.2. Relation entre les contraintes et les déformations

II.1.2.1. Le tenseur des déformations

Soit OPQ une droite passant par l'origine des coordonnée P et Q étant deux points du solide distants de $\vec{\Delta X}$ et P étant à la distance $\vec{X}$ de l'origine (voir figure 1). Déformons le solide et soit U le champ de vecteurs déplacements. La droite OPQ devient la courbe OP'Q'; P' étant à la distance $\vec{X} + \vec{U}$, P' et Q' sont éloignés de $\vec{\Delta X} + \vec{\Delta U}$.

Le tenseur des déplacements relie les variations des déplacements $\vec{U}$ aux variations de positions $\vec{X}$

Projeté sur les axes, on définit 9 coefficients f_{ij} tels que :

$$f_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{i et j variant de 1 à 3} \qquad (7)$$

Ce tenseur gradiant du déplacement se décompose en la somme d'un tenseu de rotation sans déformation que l'on montre être antisymétrique, et du tenseur des déformations. Ce dernier est alors la partie symétrique des f_{ij}. On le note e_{ij}.

.../

II.1.2.2. Loi de Hooke

Si le matériau est élastique, les contraintes sont reliées aux déformations par la relation linéaire :

$$e_{ij} = S_{ijk\ell} . \sigma_{k\ell} \qquad (8)$$

Il y a 81 coefficients d'élasticité $S_{ijk\ell}$. Cependant tous ne sont pas indépendants.

Les tenseurs, e_{ij} et $\sigma_{k\ell}$ étant symétriques : $S_{ijk\ell} = S_{jik\ell}$
Les relations de symétrie permettent de simplifier les notations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{devient :} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \quad \text{devient :} \quad \begin{bmatrix} e_1 & 1/2e_6 & 1/2e_5 \\ 1/2e_6 & e_2 & 1/2e_4 \\ 1/2e_5 & 1/2e_4 & e_3 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$S_{ijk\ell} = S_{mn} \quad (m \leq 6,\ n \leq 3)$

$2S_{ijk\ell} = S_{mn} \quad (m \leq 6,\ n \geq 4)$

La relation (8) devient alors :

$$e_i = S_{ij} . \sigma_j$$

(i et j variant de 1 à 6) (10)

.../

Le nombre des coefficients d'élasticité S_{ij} est aussi ramené à 36.

Des considérations de thermodynamique permettent de démontrer que :

$$S_{ij} = S_{ji}$$

ce qui réduit le <u>nombre des coefficients élastiques à 21</u>.

II.1.2.3. <u>Cas d'un corps isotrope</u>

Le fait qu'il y ait invariance par rotation implique des symètries nouvelles et la matrice de S_{ij} se simplifie en :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \text{ avec } S_{44} = 2(S_{11} - S_{12}) \qquad (11)$$

Développons alors la relation (10). On obtient :

$$\begin{aligned}
e_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{12}\sigma_3 &&= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\
e_2 &= S_{12}\sigma_1 + S_{11}\sigma_2 + S_{12}\sigma_3 &&= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] \\
e_3 &= S_{12}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{11}\sigma_3 &&= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \\
e_4 &= 2(S_{11} - S_{12})\sigma_4 &&= \frac{1}{G}\sigma_4 \qquad (12) \\
e_5 &= 2(S_{11} - S_{12})\sigma_5 &&= \frac{1}{G}\sigma_5 \\
e_6 &= 2(S_{11} - S_{12})\sigma_6 &&= \frac{1}{G}\sigma_6
\end{aligned}$$

.../

avec E = module d'Young

G = module de rigidité

ν = coefficient de Poisson

$$S_{11} = \frac{1}{E} \qquad S_{12} = -\frac{\nu}{E}$$

$$\left[2\,(S_{11} - S_{12})\right]^{-1} = G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

II.1.2.4. Corps isotrope soumis à une contrainte biaxiale

Si le corps est formé d'une plaque plane qui subit seulement des contraintes dans son plan, alors σ_3 est nul en moyenne et les équations (12) deviennent, en se référant aux axes du tenseur des tensions :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\,\sigma_2\right] \\ e_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\,\sigma_1\right] \\ e_3 &= -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_1 + \sigma_2\right] \end{aligned} \qquad (13)$$

En effet, dans ce cas, $\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$

Si la plaque plane non contrainte a une épaisseur e après mise en charge, l'épaisseur est devenue $e' = e + \frac{\delta e}{e}$ (14)
(voir figure 2), et la troisième équation du groupe (13) donne :

$$\boxed{\frac{\delta e}{e} = -\frac{\nu}{E}\,(\sigma_1 + \sigma_2)} \qquad (15)$$

On voit que la dilatation normale à la plaque mince et isotrope est proportionnelle à la somme des deux contraintes principales dans son plan.

.../

II.2. Optique des milieux anisotropes

II.2.1. Introduction

Nous décrivons dans ce chapitre quelques phénomènes liés à la propagation de la lumière dans les milieux transparents anisotropes. Nous étudions en particulier la biréfringence ou double réfraction. Il existe deux types de biréfringence :

- la biréfringence naturelle qui résulte d'une anisotropie de structure des corps (par exemple des cristaux).

- la biréfringence accidentelle, produite par une contrainte par exemple.

II.2.2. Surface des indices

Lorsqu'un milieu anisotrope est éclairé par une onde monochromatique plane, il y a en général décomposition en deux ondes qui peuvent se propager avec des vitesses de phase ou célérités différentes. Ces deux ondes sont polarisées rectilignement. Pour chacune, la valeur du rapport entre la vitesse c de la lumière dans le vide et la vitesse v de l'onde dans le milieu est appelé indice de réfraction $n = \frac{c}{v}$. Les indices de réfraction dépendant de la direction de l'onde initiale, ils peuvent être représentés par l'ellipsoïde des indices. L'équation de ce dernier est :

$$B_{ij}\, x_i\, x_j = 1 \qquad (16)$$

avec $B_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial D_j}$ (i, j varient de 1 à 3)

$\vec{E}$ étant le champ électrique de l'onde incidente et $\vec{D}$ le vecteur déplacement à l'intérieur du matériau.

.../

Les B_{ij} sont reliés au tenseur des permitivités par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial E_j} \quad (i,\ j \text{ variant de } 1 \text{ à } 3) \tag{17}$$

ϵ_{ij} et B_{ij} sont des tenseurs symétriques. Ramené à ces axes principaux l'ellipsoïde a pour équation :

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \ (\text{soit } \epsilon_i = n_i^2) \tag{18}$$

n_1, n_2, n_3 sont appelés indices de réfraction principaux.

II.2.3. Propriété de l'ellipsoïde des indices

Soit ON la normale à l'onde incidente sur le milieu. Représentons la section diamètrale de l'ellipsoïde perpendiculaire à ON. C'est une ellipse. (voir figure 3).

Les deux surfaces d'onde qui peuvent se propager à l'intérieur du cristal perpendiculairement à ON ont des indices de réfraction égaux aux demi-axes OA et OB de cette ellipse.

II.2.4. Classification des milieux anisotropes

Dans le cas général, l'ellipsoïde des indices possède deux sections circulaires, c'est à dire deux directions privilégiées de l'onde selon lesquelles il n'y a pas double réfraction.

Ces deux directions sont les axes optiques. Le milieu est biaxe. (voir figure 4).

.../

- Si l'ellipsoïde des indices est de révolution les deux directions ci-dessus sont confondues avec l'axe de l'ellipsoïde. Le milieu est uniaxe.

- Si l'ellipsoïde se réduit à une sphère, le milieu est isotrope.

II.2.5. Biréfringence des milieux biaxes

Considérons un rayon lumineux polarisé se propageant parallèlement à l'un des axes principaux de l'ellipsoïde des indices, ox_3 par exemple. (voir figure 5)

On peut décomposer cette lumière en deux vibrations orthogonales, polarisées rectilignement dans la direction des axes de l'ellipse, section droite de l'ellipsoïde des indices du milieu.

La vibration parallèle à n_1 se propage à la vitesse $v_1 = \frac{c}{n_1}$. La vibration parallèle à n_2 se propage à la vitesse $v_2 = \frac{c}{n_2}$. Le retard de la première sur la seconde, mesuré en chemin optique vaut :

$$\delta = e\,(n_1 - n_2) \qquad (19)$$

Le déphasage $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ produit une modification de l'état de polarisation de la lumière incidente qui peut être mesuré par polarimétrie.

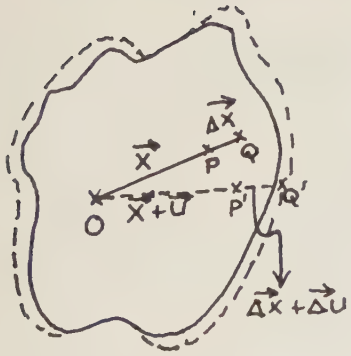


figure 1

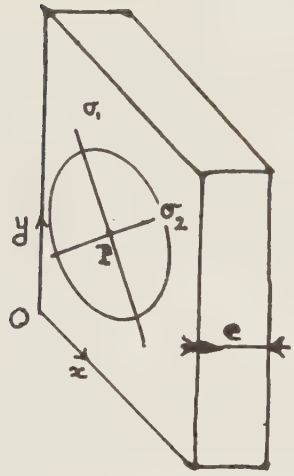


figure 2

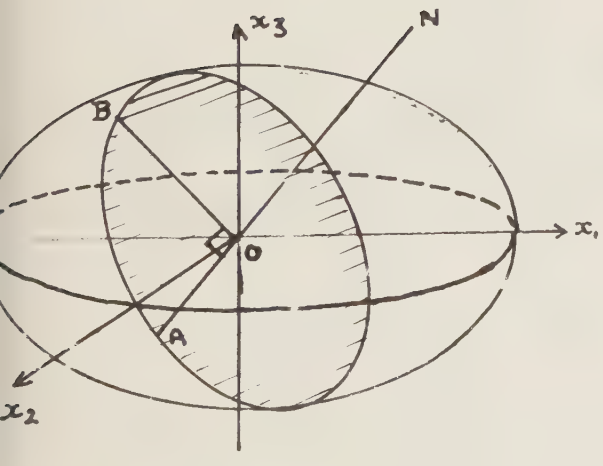


figure 3

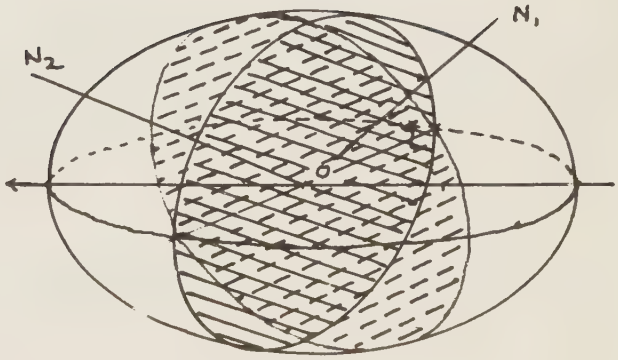


figure 4

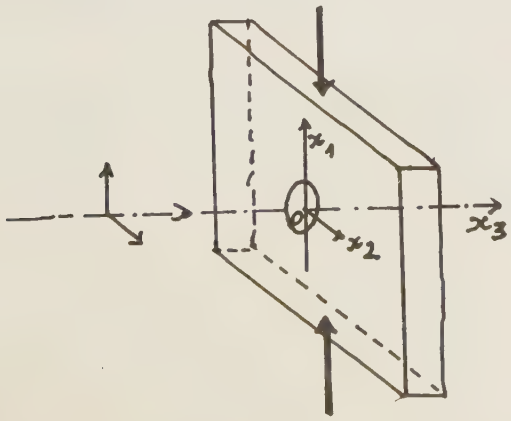


figure 5

II.3. Théorie de la photoélasticité

II.3.1. Effet photoélastique

L'effet photoélastique est la variation des indices de réfraction d'un matériau transparent en fonction des contraintes qui lui sont appliquées.

Ces contraintes modifient l'ellipsoïde des indices. On admet que la loi reliant la variation des coefficients B_{ij} de la forme quadratique (16) aux contraintes est linéaire :

$$\Delta B_{ij} = \pi_{ijk\ell} \cdot \sigma_{k\ell} \qquad (20)$$

On définit ainsi 81 coefficients piezo-optiques $\pi_{ijk\ell}$. De même qu'au paragraphe II.1.2.2., des conditions de symétrie permettent de réduire à 36 le nombre des coefficients et d'adopter la notation simplifiée suivante :

$$\Delta B_n = \pi_{mn} \sigma_n \qquad (m,n \text{ variant de } 1 \text{ à } 6) \qquad (21)$$

avec $\pi_{m,n} = \pi_{ijk\ell}$ si $n = 1, 2, 3$

$\pi_{m,n} = 2\,\pi_{ijk\ell}$ si $n = 4, 5, 6$

II.3.2. Cas des corps isotropes

Les mêmes considérations qu'au paragraphe II.1.2.3 permettent d'écrire la matrice des coefficients π :

.../

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \pi_{44} = 2(\pi_{11} - \pi_{12}) \qquad (22)$$

qui est isomorphe à la matrice des coefficients S

Avant contrainte, le corps était isotrope et l'ellipsoïde des indices se réduisait à la sphère d'équation :

$$B_0 \, (x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}) = 1$$

$$\text{avec } B_0 = \frac{1}{(n_0)^2} \qquad (23)$$

En prenant pour directions des axes celles des directions principales de la contrainte ci-dessous et après contrainte, l'ellipsoïde des indices s'écrit :

$$B_1 \, x_1^{\,2} + B_2 \, x_2^{\,2} + B_3 \, x_3^{\,2} + 2B_4 \, x_2 \, x_3 + 2B_5 \, x_3 \, x_1 + 2B_6 \, x_1 \, x_2 = 1 \qquad (24)$$

$$\Delta B_i = \pi_{ij} \, \sigma_j$$

Lorsqu'on reporte dans cette égalité l'expression (22) de la matrice π_{ij} , les inconnues ΔB_i sont données par

$$\begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - B_0 \\ B_2 - B_0 \\ B_3 - B_0 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

.../

On voit que $B_4 = B_5 = B_6 = 0$

- Le nouvel ellipsoïde des indices a donc les mêmes axes que l'ellipsoïde des contraintes.

Les indices principaux sont :

$$B_1 = \left(\frac{1}{n_1}\right)^2 \quad , \quad B_2 = \left(\frac{1}{n_2}\right)^2 \quad , \quad B_3 = \left(\frac{1}{n_3}\right)^2$$

avec $\Delta B_i = -\dfrac{2}{(n_i)^3}\,\Delta n_i = -\dfrac{2}{(n_0)^3}\,\Delta n_i$ (26)

car Δn_i est petit. Donc :

$$n_i - n_0 = -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,(B_i - B_0) \tag{27}$$

Et en développant la relation (25), on trouve :

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{11}\,\sigma_1 + \pi_{12}\,\sigma_2 + \pi_{12}\,\sigma_3] \\ n_2 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{12}\,\sigma_1 + \pi_{11}\,\sigma_2 + \pi_{12}\,\sigma_3] \\ n_3 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{12}\,\sigma_1 + \pi_{12}\,\sigma_2 + \pi_{11}\,\sigma_3] \end{aligned} \tag{28}$$

Le milieu est devenu biaxe

II.3.3. <u>Corps isotropes sousmis à une contrainte biaxiale</u>

Une contrainte biaxiale est caractérisée par deux composantes normales σ_1 et σ_2, la valeur σ_3 étant nulle.

Le groupe d'équations (28) devient alors :

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{11}\,\sigma_1 + \pi_{12}\,\sigma_2] \\ n_2 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{12}\,\sigma_1 + \pi_{11}\,\sigma_2] \\ n_3 - n_0 &= -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{12}\,\sigma_1 + \pi_{12}\,\sigma_2] \end{aligned} \tag{29}$$

on en déduit :

$$\boxed{n_1 - n_2 = -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,[\pi_{11} - \pi_{12}][\sigma_1 - \sigma_2]}$$

.../

II.4. Notions de Polarimétrie

II.4.1. Propagation de la lumière

Dans ce qui suit, nous n'utiliserons pas le point de vue quantique. Seul, le point de vue vectoriel sera abordé.

Un faisceau de lumière cohérente se propageant dans un milieu homogène peut être caractérisé par douze paramètres :

- Six paramètres géométriques

  - trois correspondant aux coordonnées du point P où passe le faisceau.
  - le vecteur unitaire $\vec{u}$ normale à la section droite du faisceau
  - le diamètre d du faisceau

On remarque que le faisceau considéré est parcouru par un nombre très grand de photons et que son diamètre d et son vecteur $\vec{u}$, connu à Δu près, satisfont à la relation :

$$d.\ \Delta u \gg h \qquad (30a)$$

- Six paramètres lumineux

En général, le vecteur électrique $\vec{E}$ associé à un faisceau de lumière totalement polarisée décrit une hélice dans l'espace, et le cylindre sur lequel elle est tracée est de section elliptique.

On peut donc caractériser la polarisation de cette lumière par les paramètres définissant cette ellipse : (voir figure 5b)

- la direction α du grand axe de cette ellipse par rapport à un axe de référence.
- son excentricité définie par le rapport b/a des longueurs des axes principaux, et le sens de parcours sur cette ellipse, que l'on décrit à l'aide d'un angle λ tel que :

.../

$$\operatorname{tg} \lambda = b/a \quad , \text{ avec } -\pi/4 \leq \lambda \leq \pi/4 \tag{30b}$$

Les lumières dextrogires sont celles pour lesquelles $\lambda > 0$ et les lévogires, celles pour lequelles $\lambda < 0$. Les lumières pour lesquelles $\lambda = 0$ sont polarisées linéairement.

La décomposition de cette lumière monochromatique en deux lumières orthogonales polarisées rectilignement donne les expressions :

$$\begin{cases} E_1 = E_x \sin(\omega\tau - \varphi_x) \\ E_2 = E_y \sin(\omega\tau - \varphi_y) \end{cases} \tag{30c}$$

Cette lumière a une intensité I_1 que l'on peut calculer à partir des relations (30c) :

$$I_1 = \left[E_x \sin(\omega\tau - \varphi_x) + E_y \sin(\omega\tau - \varphi_y)\right]^2 \tag{30d}$$

Un faisceau de lumière partiellement polarisée peut être décrit par la supposition d'un faisceau totalement polarisé d'intensité I_1 et d'un faisceau de lumière non polarisée d'intensité I_2, décomposable également sur les axes Ox et Oy précédents en deux composantes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \epsilon_x \sin(\omega\tau - \varphi_x) \\ \mathcal{E}_2 = \epsilon_y \sin(\omega\tau - \varphi_y) \end{cases} \tag{30e}$$

$(\psi_y - \psi_x)$ varie dans le temps de façon aléatoire, tandis que $\varphi_y - \varphi_x$ est constant dans le temps. L'intensité totale du faisceau est :

$$I = I_1 + I_2 = \langle (E_1 + \mathcal{E}_1)^2 + (E_2 + \mathcal{E}_2)^2 \rangle \tag{30f}$$

(Le symbole $\langle\,\rangle$ exprime une valeur moyenne dans le temps)

.../

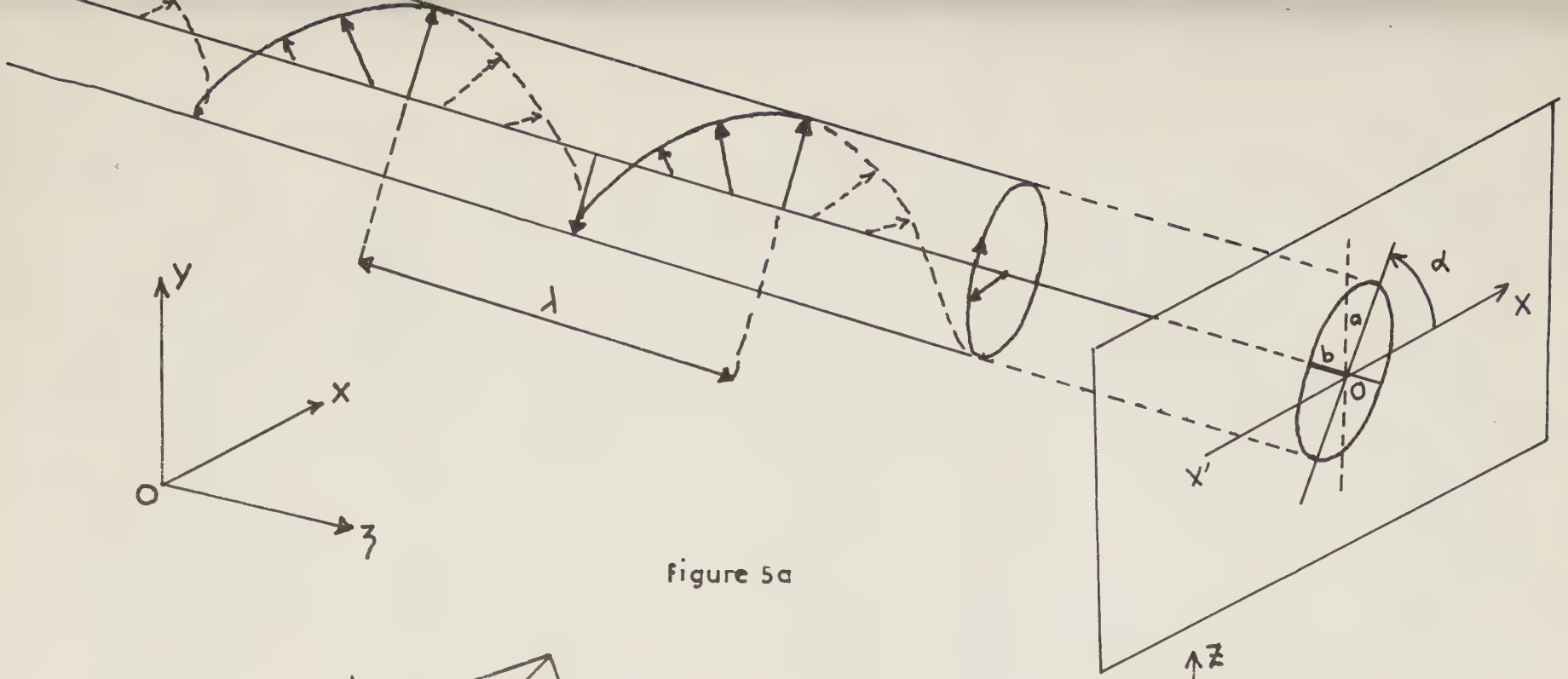


figure 5a

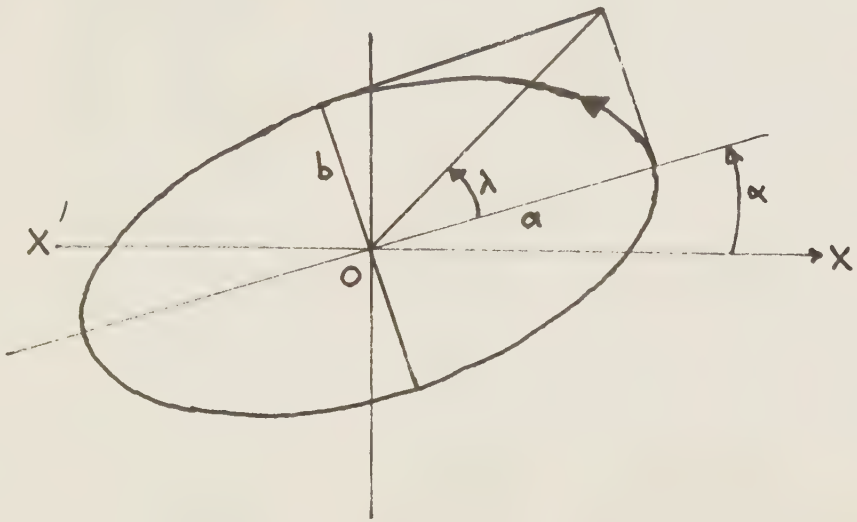


figure 5b

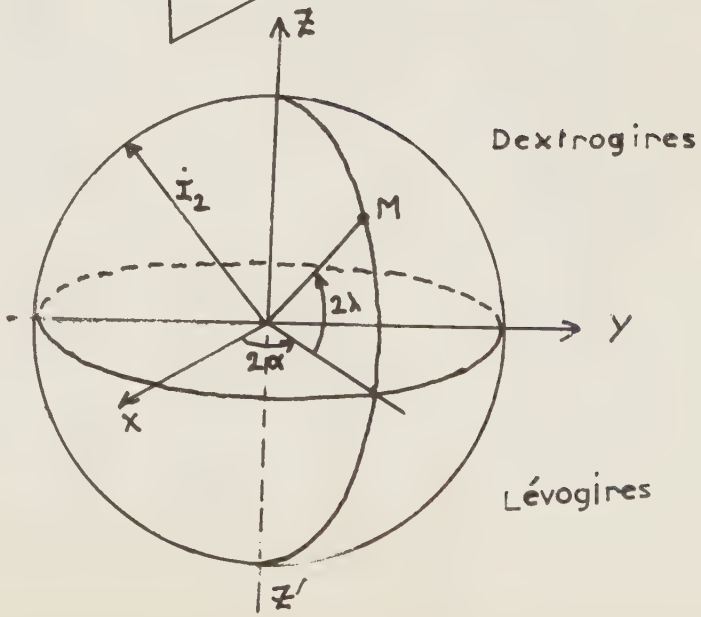


figure 5c

Un faisceau de lumière peut alors être décrit par un vecteur $\vec{V}$ à quatre dimensions, appelé <u>vecteur de Stokes</u>, et relié aux divers paramètres précédents par les relations :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} I \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \langle (E_1 + \mathcal{E}_1)^2 + (E_2 + \mathcal{E}_2)^2 \rangle \\ M &= I_2 \cos 2\lambda \cos 2\alpha = \langle (E_1 + \mathcal{E}_1)^2 - (E_2 - \mathcal{E}_2)^2 \rangle \\ C &= I_2 \cos 2\lambda \sin 2\alpha = \langle 2(E_1 + \mathcal{E}_1)(E_2 + \mathcal{E}_2)\cos(\varphi_y - \varphi_x) \rangle \\ S &= I_2 \sin 2\lambda \qquad\qquad = \langle 2(E_1 + \mathcal{E}_1)(E_2 + \mathcal{E}_2)\sin(\varphi_y - \varphi_x) \rangle \end{aligned} \qquad (30g)$$

Les lumières dextrogires sont celles pour lesquelles $0 < \varphi_y - \varphi_x < \pi$ et les lévogires, celles pour lesquelles $\pi < \varphi_y - \varphi_x < 0$.

I représente l'intensité totale du faisceau lumineux
M,C, et S représentent les trois coordonnées d'un point M d'une sphère de rayon I_2, appelée <u>sphère de Poincaré</u> (voir figure 5c)

La direction de la lumière est la direction Z'Z

La direction OX représente la direction X'X de la figure 5b.

On appelle forme de lumière l'ellipse représentée par le point M.

Les phènomènes physiques qui modifient un ou plusieurs de ces paramètres, sont les suivants : absorption, diffusion, dichroïsme et biréfringence.

Lors de la traversée d'un milieu non absorbant, les deu intensités I_1 et I_2 gardent des valeurs constantes. Ce cas est celui qui est envisagé dans la suite. Il correspond à un sous espace, appelé espace de Poincaré, à trois dimensions, et dont les vecteurs sont normalisés ($I_2 = 1$), pour des lumières totalement polarisées ($I_1 = 0$).

.../

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} M \\ C \\ S \end{bmatrix} \begin{matrix} = \cos 2\lambda \cos 2\alpha \\ = \cos 2\lambda \sin 2\alpha \\ = \sin 2\lambda \end{matrix} \qquad (30h)$$

II.4.2. Sphère de Poincaré et Applications

Si nous limitons comme suit les valeurs de α et λ

$$\begin{matrix} 0 \leq 2\alpha < 2\pi \\ -\pi \leq 2\lambda < +\pi \end{matrix} \qquad (30i)$$

Alors il y a une correspondance bi-univoque entre un poin M de la sphère de poincaré, de rayon 1, et une forme de lumière.

Nous avons vu au paragraphe II.2.5. (figure 5) que quand on se déplace selon un des axes de l'ellipsoïde des indices d'un milieu anisotrope, le vecteur lumineux ne voit qu'une ellipse dont les axes principaux sont n_1 et n_2. Soit Ox_1, l'axe de n_1.

En voyant sur le point O une forme de lumière M (α, λ) et regardons quelle est l'image M' aprés traversée du modèle (voir figure 5d)

On démontre [1] que $M'(\alpha', \lambda')$ se déduit de $M(\alpha, \lambda)$ par une rotation de l'angle $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - n_2)e$ autour de l'axe Ox_1

$$\begin{bmatrix} M' \\ C' \\ S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M \\ C \\ S \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} M \\ C \\ S \end{bmatrix} \qquad (30j)$$

de même, un biréfringent linéaire B de déphasage φ dont l'axe rapide fait un angle θ avec la direction de référence Ox_1 est représenté par l'opérateur matriciel suivant :

.../

$$B_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & +\sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (30k)$$

Ce qui se représente sur la sphère de Poincaré par une rotation d'angle φ autour de l'axe Ox faisant un angle 2θ avec l'angle de référence.

De plus, un <u>pouvoir rotatoire</u> R fait tourner le grand axe d'une lumière elliptique sans modifier son aplatissement ni son sens de parcours. Il est donc représenté par une rotation d'angle 2R autour de l'axe Z'Z et la matrice associée est :

$$R_r = \begin{bmatrix} \cos 2R & -\sin 2R & 0 \\ \sin 2R & \cos 2R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (30\ell)$$

On appelle <u>biréfringent elliptique</u> une rotation autour d'un axe quelconque de la Sphère de Poincaré, passant par O. La matrice associée à ce biréfringent est unitaire.

<u>Représentation d'un filtre elliptique (FF')</u>

Soit α_1 et λ_1 les paramètres caractérisant le point F. Un filtre elliptique agissant sur une lumière monochromatique est défini comme suit :

Il laisse passer la vibration représentée par F et il absorbe la vibration F' <u>orthogonale</u> à F (voir figure 5c) qui est diamètralement opposée à F.

Une vibration représentée par M avec pour énergie I_0, est représentée par F après traversée du filtre, son énergie I étant définie par la relation :

$$I = TI_0 \frac{F'H}{F'F} \qquad (30m)$$

.../

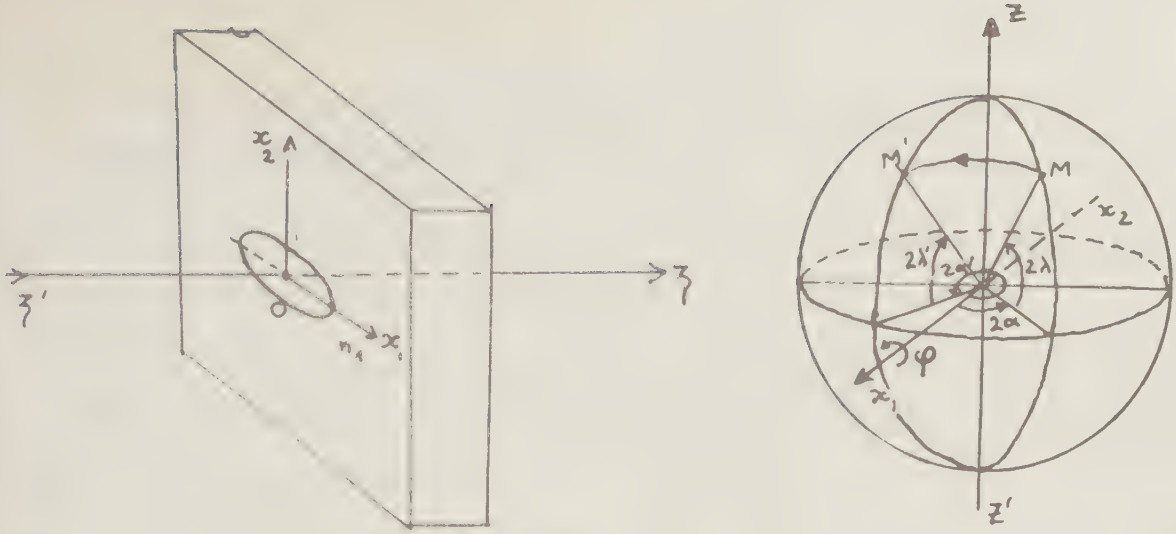


figure 5d

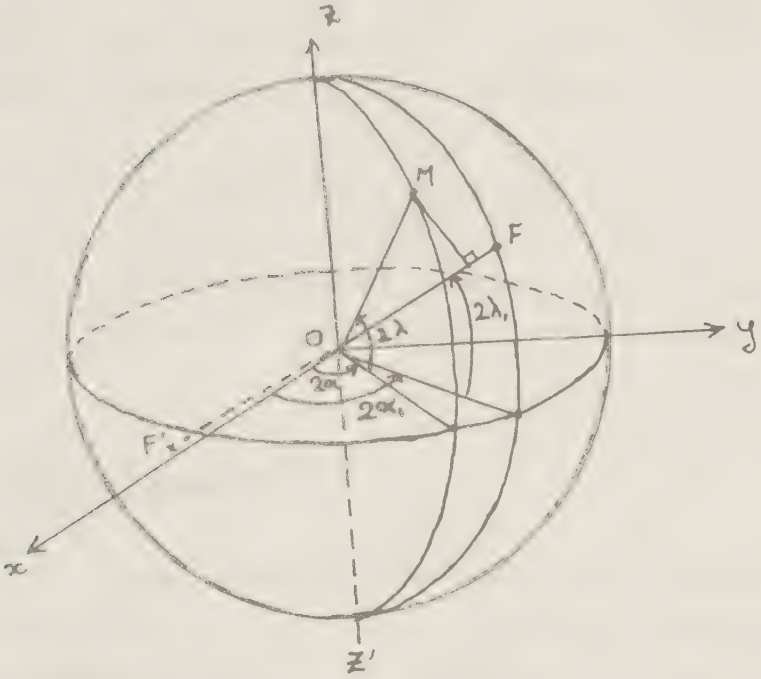


figure 5e

Où H est le pied de la projection orthogonale de M sur FF', T le facteur de transmission du filtre.

Dans le cas où le filtre est linéaire (polariseur) F et F' sont dans le plan équatorial : $\lambda_1 = 0$ et $\alpha_1 = \beta$

Dans ce cas, l'énergie transmise par le filtre linéaire pour une forme de lumière d'énergie I_0 définie par α et λ s'écrit :

$$\boxed{I = \frac{1}{2} I_0 \left[1 + \cos 2\lambda \cos 2 (\beta - \alpha)\right]} \qquad (30n)$$

Une suite de biréfringents dont les axes ne sont pas confondus est représentée sur la sphère de Poincaré par des rotations successives. L'ordre étant celui de la rencontre de la lumière avec les différents biréfringents, n'est pas commutatif.

Une suite de rotations dans un plan étant équivalente à une rotation hors du plan, une suite de biréfringents linéaires est équivalente à un biréfringent elliptique, que l'on peut ensuite décomposer en un biréfringent linéaire suivi d'un pouvoir rotatoire ou inversement.

II.4.3. Espace de Mueller

Dans l'espace de Mueller, les opérateurs sont représentés par des matrices 4 x 4 et les vecteurs de Stokes représentent les formes de lumière. L'intérêt de cet espace est que la biréfringence, le dichroïsme, l'absorption et la diffusion y sont des opérateurs linéaires.

On déduit du paragraphe précédent que la matrice B_0 représentant une biréfringence linéaire d'axe Ox est de la forme :

.../

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & +\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad (30\ o)$$

De même, la matrice R_r d'un <u>pouvoir rotatoire</u> sera de la forme :

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2R & -\sin 2R & 0 \\ 0 & \sin 2R & \cos 2R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (30\ p)$$

De plus, un <u>dichroïsme linéaire</u> D dont les coefficients de transmission en intensité sont k_1 et k_2, pour les lumières linéaires parallèles et perpendiculaires à l'axe du dichroïsme, pris comme axe de référence, est représenté par la matrice :

$$D_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 - k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{k_1 k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{k_1 k_2} \end{bmatrix} \qquad (30\ q)$$

Enfin, une densité a pour opérateur

$$d = d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (30\ r)$$

On voit aisément que les opérateurs élliptiques se déduisent des opérateurs linéaires par des rotations d'axes. On peut donc généraliser ces matrices.

.../

III. DIVERSES METHODES NON OPTIQUES de MESURE des CONTRAINTES

III.1. Généralités

La description des propriétés mécaniques des matériaux fait intervenir de nombreuses constantes (coefficients S et π par exemple) qu'il convient de connaitre avec la meilleure précision possible. Ces constantes étant déterminées, si on procède à l'assemblage des matériaux, il est important de savoir mesurer leur état de contrainte afin d'optimiser les constructions. Les méthodes de mesure et les appareillages sont différents suivant qu'il s'agit de déterminer une constante ou un état de contrainte.

III.2. Conditions de mesure des constantes

Ces mesures sont faites sur des éprouvettes de forme convenable, taillées dans le matériau à étudier. A l'aide de presses on soumet ces éprouvettes à des efforts connus et on mesure la déformation qui en résulte ce qui permet de calculer les coefficients mécaniques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson...)

III.3. Conditions d'essais des constructions

Les essais peuvent être effectués soit directement sur les constructions soit sur des modèles réalisés en matériau photoélastique.

Dans le premier cas les appareils doivent être universels et capables de fonctionner quelle que soit la forme des pièces, les conditions de travail (température, humidité...)

.../

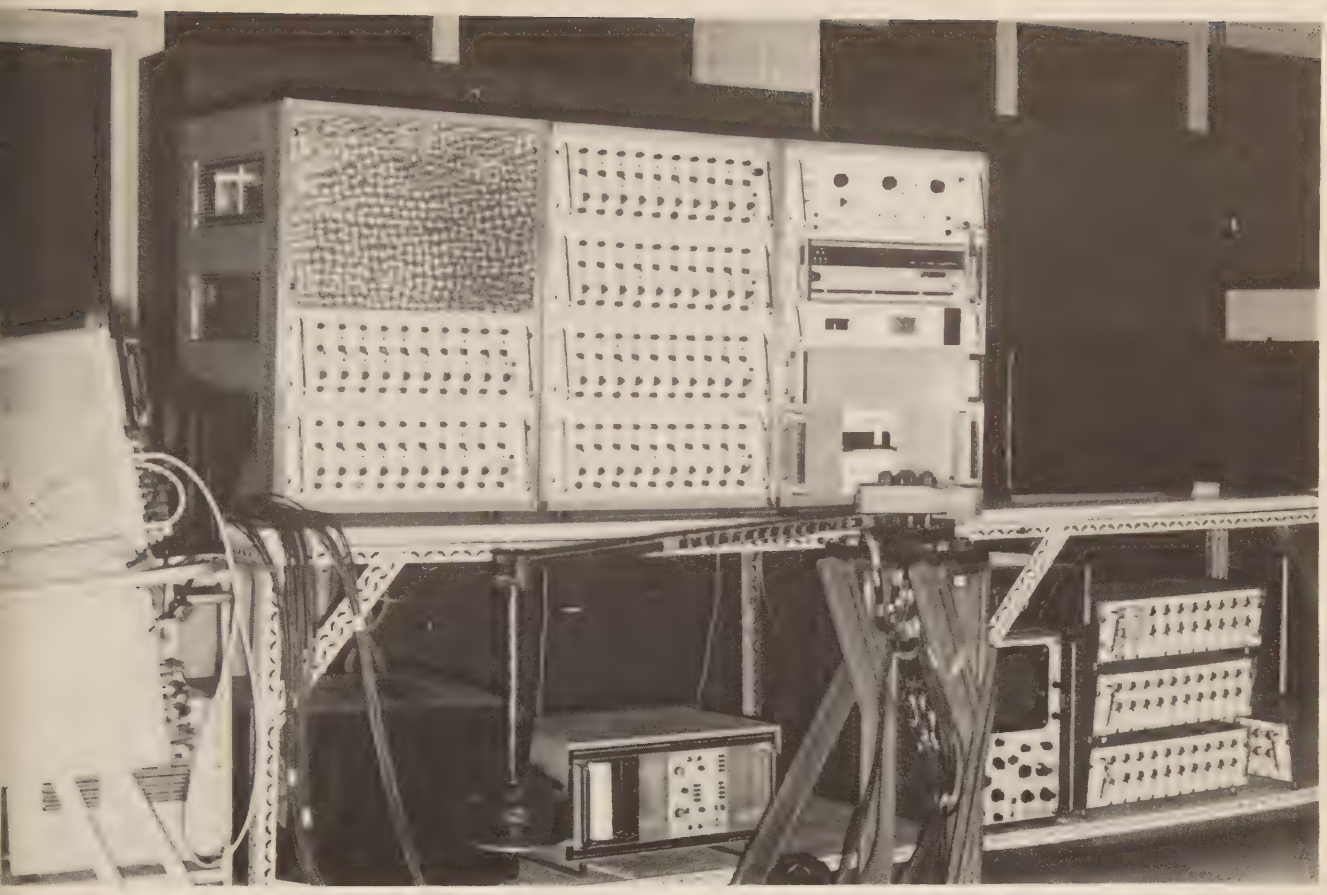
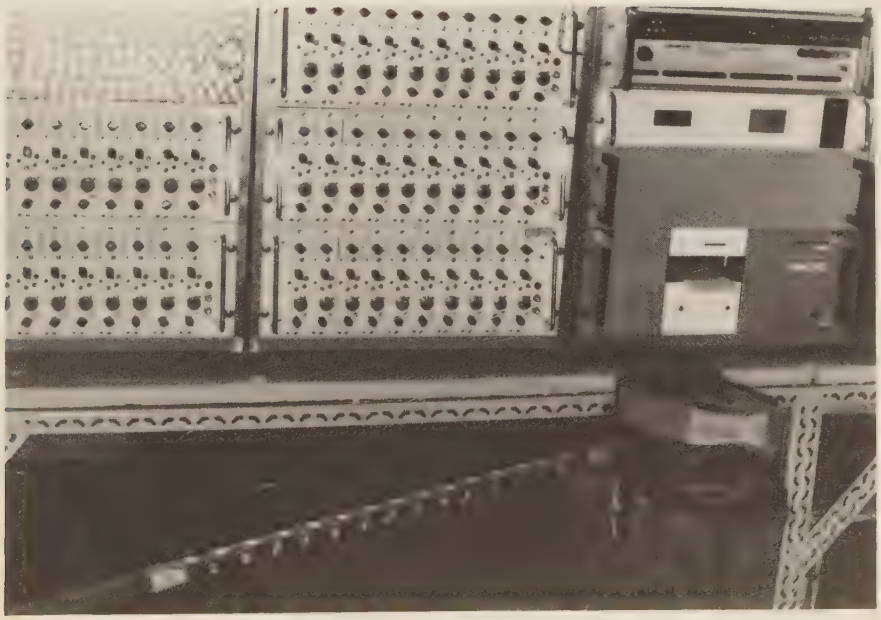


Photo 1



Dans le deuxième cas, on doit admettre que la réduction d'échelle et le changement de matériau utilisé ne modifient pas la répartition des tensions dans le modèle.

Pour les objets tridimentionnels, les paramètres à mesurer en un point sont : $\boxed{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$. (cos α, cos β et cos γ sont les cosinus directeurs de la direction principale de σ_1). (voir figure 6)

Pour les objets bidimentionnels, $\sigma_3 = 0$ et les paramètres à mesurer en un point sont : $\boxed{x, y, \alpha, \sigma_1, \sigma_2}$. (voir figure7)

L'extensométrie utilise pour déterminer ces paramètres, les équations (12).

La photoélasticimétrie utilise les équations (28).

III.4. Aperçu sur les appareils utilisés

III.4.1. Utilisation d'un extensomètre

Cet appareil permet de mesurer directement les allongements (voir figure 8) Il fonctionne en statique. La résolution est $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{2.000}$ pour une base nominale de $\ell = 2$ mm.

L'appareil est délicat a installer. La courbure des pièces introduit une erreur compensée par l'utilisation de deux extensomètres.

III.4.2. Capteurs par variation de résistance

La déformation est mesurée par la variation de la résistance d'un fil collé sur l'objet en fonction de son allongement (voir figure 9). Il fonctionne en dynamique. (voir photo 1 - une utilisation)

.../

$$\frac{\Delta R}{R} = \gamma\ Ex + \delta\ Ey \qquad (31)$$

Pour ℓ petit γ et δ sont du même ordre de grandeur et le capteur est sensible aux deux déformations (effet corrigé en disposant trois capteurs à 45° les uns des autres).

Si la construction est complexe il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de capteurs.

III.4.3. Méthode de vernissage

La pièce est enduite d'une couche de vernis rigide. Quand on contraint la pièce le vernis se fendille; les craquelures sont perpendiculaires à la direction d'allongement maximum. Cette méthode d'exploration permet de disposer judicieusement les capteurs.

III.4.4. Mesure aux rayons X

On étudie la figure de diffraction X donnée par la surface du matériau. Un allongement se traduit par une variation de la distance entre les plans réticulaires du réseau métallique, ce qui provoque une modification de la figure de diffraction (voir figure 10). Cette méthode n'a pas trouvé une large expansion à cause de la complexité et du volume de l'appareillage. L'interpretation des résultats est rendue délicate du fait de l'anisotropie élastique des cristaux.

.../

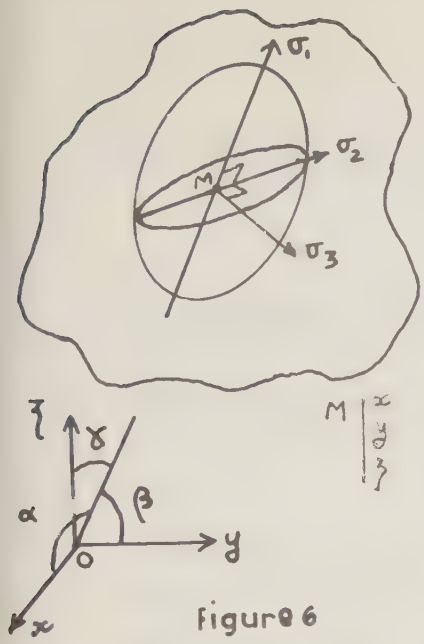


figure 6

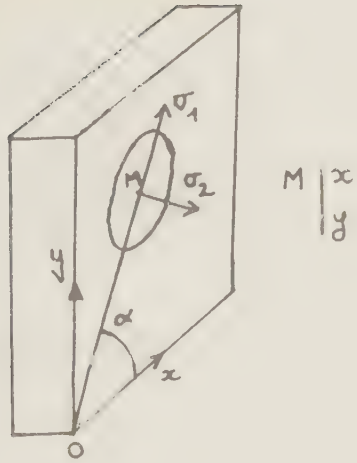


figure 7

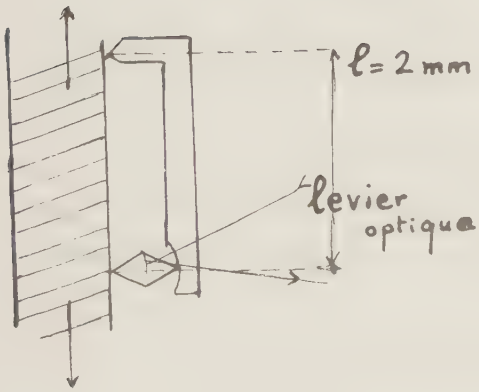


figure 8

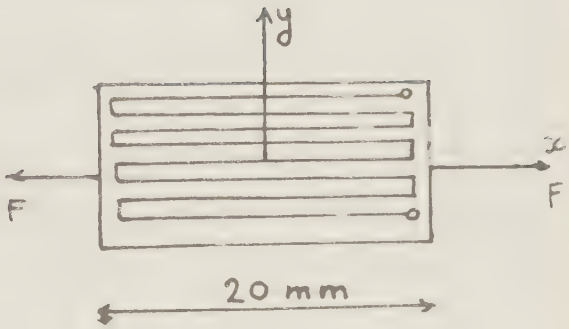


figure 9

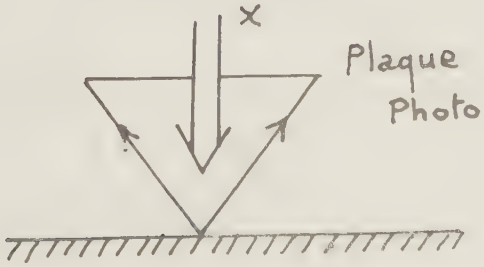


figure 10

IV. METHODES OPTIQUES de MESURE des CONTRAINTES

IV.1. Echantillon transparent bidimensionnel

IV.1.1. Le moiré de Dantu

La méthode de moiré de Dantu (1958) est une méthode d'extensométrie de surface. Elle consiste à reproduire sur la surface des objets à étudier un quadrillage régulier, puis de recouvrir ce quadrillage d'un autre identique et fixe. Quand l'objet se déforme il apparait des franges d'égal déplacement, de basse fréquence spatiale. La connaissance du pas et de la direction de ces franges permet de remonter aux contraintes à l'aide des équations (12).

IV.1.2. Photoélasticimétrie classique

La photoélasticimétrie classique à deux dimensions consiste à placer un échantillon photoélastique contraint entre polariseurs linéaires croisés et à éclairer en lumière blanche diffuse.

Il apparait alors deux familles de franges.

IV.1.2.1. Isochromes

Une famille colorée appelée isochromes est telle qu'à chaque longueur d'onde λ, c'est à dire à chaque couleur, correspond une famille de courbes d'isodéphasages, $\varphi = 2k\pi$

or, $\varphi = \dfrac{2\pi\,(n_1 - n_2)\,e}{\lambda} = 2\,k\,\pi$ (e = épaisseur de l'échantillon)

soit $n_1 - n_2 = k\,\dfrac{\lambda}{2e} = cte$ (32)

.../

Avec l'équation (30), on obtient :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{k\lambda}{2en_0^3(\pi_{11} - \pi_{12})} = cte \qquad (33)$$

Les courbes $\sigma_1 - \sigma_2 = cte$ obtenues sont les isochromatiques ou lieu des points où la différence des contraintes principales est constante. C'est aussi le lieu des points du modèle de même cisaillement maximal.

IV.1.2.2. Isoclines

Une famille de bandes noires appelées isoclines est telle que la lumière incidente polarisée linéairement traverse l'échantillon sans déformation quelle que soit λ. Elle est donc le lieu des points où la direction des axes du biréfringent, c'est à dire la direction des contraintes principales est parallèle à une direction donnée, qui est celle des polariseurs. Il s'agit d'une direction α module $\pi/2$.

A partir de cette famille de courbes, on peut tracer la famille d'enveloppes des directions principales, appelées isostatiques.

IV.1.2.3. Separation des contraintes

Il manque une mesure physique pour décrire entièrement l'état local de contraintes. Il s'agit de $\sigma_1 + \sigma_2$. Cette mesure n'étant pas réalisable par cette méthode, elle est remplacée par une méthode de calcul appelée "séparation de contraintes".

Cette méthode consiste à intégrer l'équation différentielle régissant l'équilibre d'un petit élément du modèle, à partir du contour libre où la valeur de la différence des contraintes donne directement l'une des contraintes principales, l'autre étant nulle. On le fait de trois manières :

.../

a) soit en utilisant les coordonnées rectangulaires : (figure 11)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

On intègre la première le long de l'axe ox :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dx$$

On passe aux différences finies.

$$(\sigma_x)\, x_1 - (\sigma_x)\, x_0 = - \left(\frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta y} \right) \frac{x_0 + x_1}{2} \,.\, \Delta x \qquad (35)$$

et on progresse en x pour un Δy donné.

b) soit sous la forme de Lamé-Maxwell : (figure 12) si l'élément d'aire est limité par quatre isostatiques voisines, appartenant par paires aux deux réseaux orthogonaux 1 et 2 :

$$(36) \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0 \end{cases}$$

σ_1 , σ_2 contraintes principales

∂s_1 : élément d'arc de l'isostatique

ρ_2 : rayon de courbure de l'isostatique 2

∂s_2 : élément d'arc de l'isostatique 2

ρ_1 : rayon de courbure de l'isostatique 1

.../

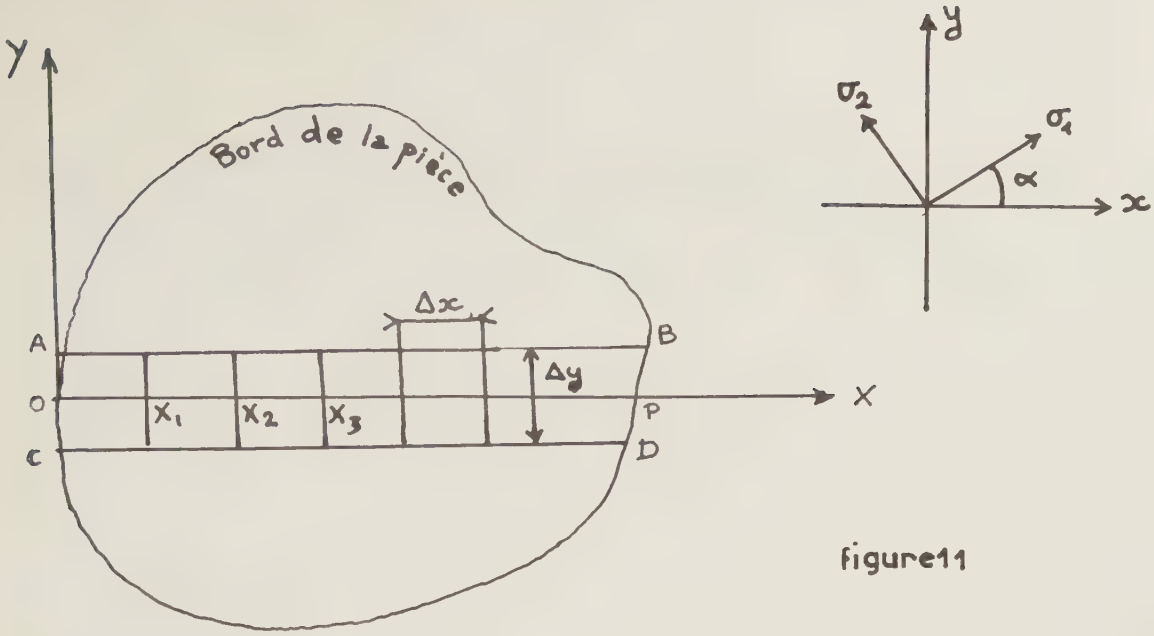


figure11

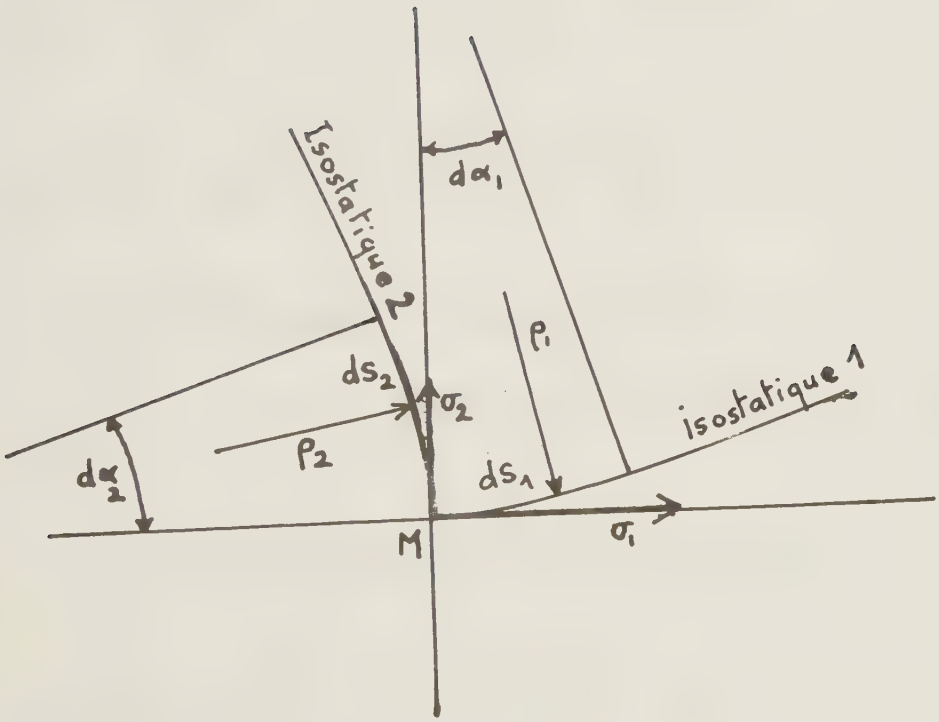


figure 12

Cette méthode nécessite le tracé des isostatiques ou enveloppe des directions de contraintes principales. L'évaluation du rayon de courbure de l'isostatique transverse pose alors des problèmes de précision.

c) soit sous la forme de Filon, (figure (13)

Elle consiste à intégrer les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha_1} = (\sigma_1 - \sigma_2)\ \mathrm{cotg}\ \psi \\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial\alpha_2} = (\sigma_2 - \sigma_1)\ \mathrm{cotg}\ (\psi - \dfrac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad (37)$$

l'angle ψ est l'angle de l'isocline avec l'isostatique au point d'analyse, les angles α_1 et α_2 sont les angles entre l'isostatique 1 et la suivante d'une part, l'isostatique 2 et la suivante d'autre part.

L'intégration graphique de ces diverses équations a fait l'objet de nombreux programmes sur ordinateurs.

IV.1.3. Photoélasticimétrie classique améliorée

Les améliorations de la méthode précédente sont de trois ordres :

IV.1.3.1. Amélioration du matériau utilisé

On utilise actuellement Araldite, Altuglass et Buton. Ce dernier est très apprécié pour son absence quasi-totale d'effets de bords.

.../

IV.1.3.2. Amincissement des isochromes [3]

Le principe de la méthode consiste à interposer sur le trajet du rayon lumineux, de part et d'autre du modèle, des lames semi-réfléchissantes. On voit sur les figures 14 et 15 comment cheminent les rayons, (obliques seulement pour la commodité de la figure). Le rayon de lumière incidente polarisé circulairement, est décomposé en deux rayons A et A' polarisés linéairement et perpendiculaires. Le rayon A' prend un retard de phase par rapport à A ainsi que B' par rapport à B etc...

Ce déphasage est faible et il faut sommer en amplitude ces divers couples. Par contre, on s'arrange pour que la longueur de cohérence de la source soit un peu plus faible que la distance AB, ce qui fait que ces divers rayons vont se sommer en intensité (tout en conservant une monochromaticité suffisante pour obtenir un bon contraste).

Si R et T sont les coefficients de rèflexion et de transmission de la lame, I_0 l'intensité initiale et δ le retard optique, l'intensité due à A + A' sera :

$$I_1 = I_0 \, T^2 \cos^2 \pi\delta$$

de même pour B + B' :

$$I_2 = I_0 \, T^2 \, R^2 \cos^2 3\pi\delta$$

soit $$I = \sum_{m=1}^{\infty} I_0 \, T^2 \, R^{2m} \cos^2(2m+1)\,\pi\delta$$

$$I = I_0 \, \frac{T^2}{2} \left[\frac{1}{1-R^2} + R_e \left\{ \sum_0^{\infty} R^{2m} \, e^{j(2m+1)\,2\pi\delta} \right\} \right] \qquad (38)$$

R_e = partie réelle

.../

Isostatique 2

$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} ds_1 = d\alpha_1$

Isostatique 2'

Isostatique 1'

$\frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} ds_2 = d\alpha_2$

Isocline (paramètre $\alpha = \alpha_1$)

B

σ_2

ds_2

y

α_2

σ_1

α_1

x

ψ

ds_1

Isostatique 1

A

O

σ_1

$OA = ds_1$

$OB = ds_2$

figure 13

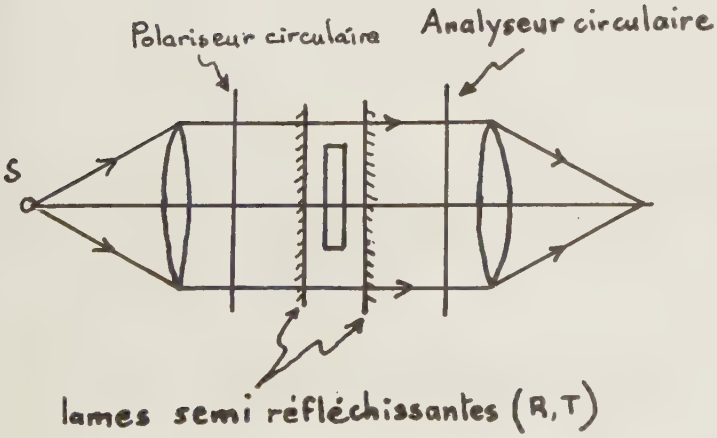


figure 14

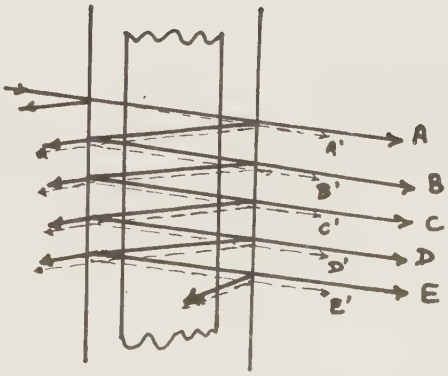


figure 15

$$\text{Soit} \quad I = \frac{I_0 T^2}{2} \left[\frac{1}{1-R^2} + \frac{(1-R^2)\cos 2\pi\delta}{1+R^4-2R^2\cos 4\pi\delta} \right] \qquad (39)$$

La figure 16 montre la répartition de l'intensité en fonction du retard δ.

Les meilleurs résultats ont été obtenus avec des lames ayant 80% de réflexion, 15% de transmission et 5% d'absorption.

Les isochromes d'ordres entiers apparaissent comme des traits noirs affinés sur fond gris, les isochromes d'ordre entier $+\frac{1}{2}$ apparaissent comme des traits blancs sur fond gris, ce qui fait que l'on double le nombre d'informations obtenues.

IV.1.3.3. Multiplication des isochromes

La figure 17 montre qu'en déréglant le système précédent et en filtrant spatialement dans le plan image une direction A, B, C ou D, on obtient une multiplication du déphasage, donc du nombre de franges, par 1, 3, 5 ou 7. On peut atteindre ainsi réellement des coefficients 17.

Si p est le nombre de réflexions, l'intensité vaut :

$$I_p = I_0 \, T^2 \, R^{p-1} \cos^2 p\,\pi\delta$$

Le maximum d'intensité s'obtient pour $\frac{dI_p}{dR} = 0$ soit pour $R = \frac{p-1}{p+1}$, ce qui donne le coefficient de réflexion optimal en fonction du coefficient multiplicatif.

IV.1.4. Méthodes interférométriques

Depuis la première proposée par Mesnager en 1913, de nombreuses méthodes ont été décrites par divers auteurs, mais toutes reposent sur le même principe : faire interférer une onde de référence avec celle perturbée par la traversée du modèle, de manière à transfor

.../

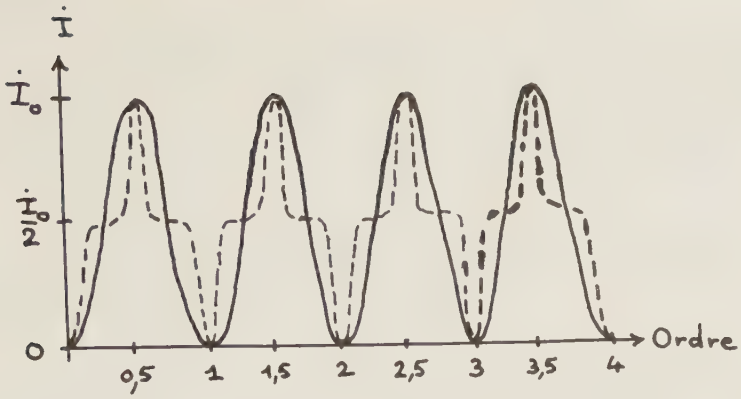


figure 16

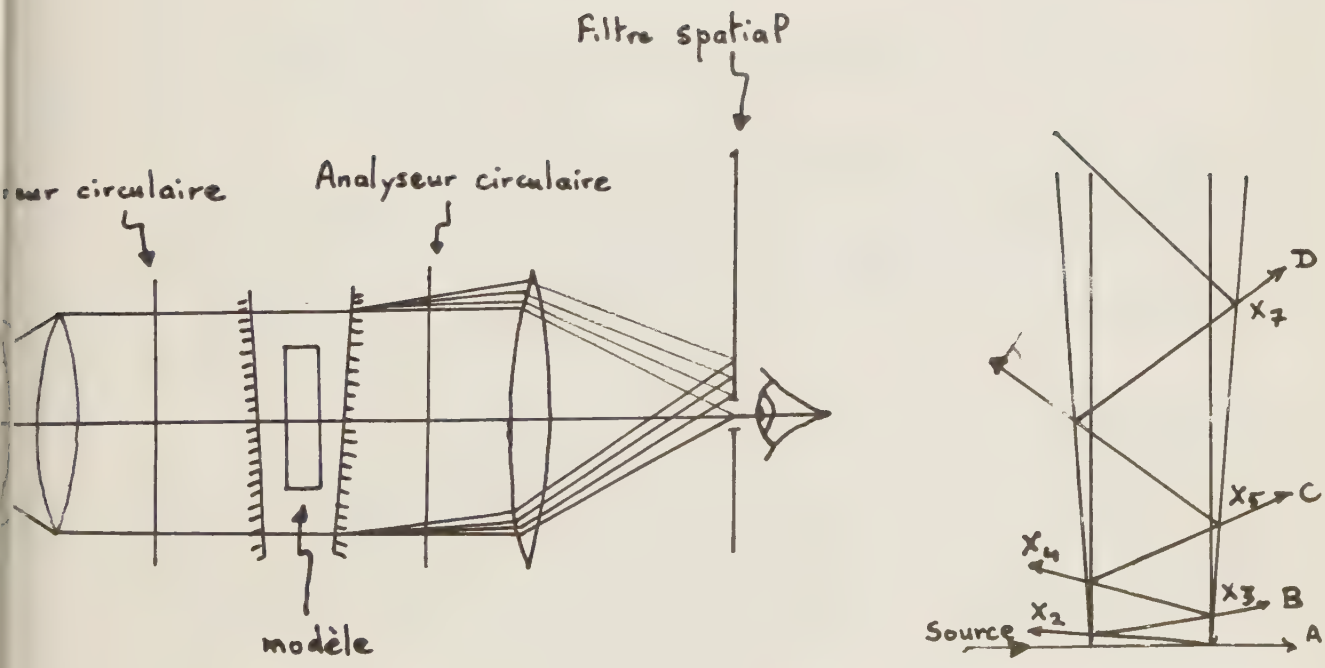


Figure 17

mer les variations de phase introduites en variations d'amplitudes enregistrables.

Parmi ces auteurs, citons Favre [9] en 1921, Fabry en 1930 [10], Brahtz et Soehrens [11] en 1939, Frocht en 1939, Sinclair en 1940, Dose et Landwehr en 1949, Mesmer en 1956, Peers en 1957.

Favre et Schumann en 1961 utilisent des photomultiplicateurs pour automatiser les mesures.

Nisida et Saïto en 1964 utilisent un Mach-Zender et obtiennent pour la première fois isopaches et isochromes sur le même cliché.

Enfin Koch (1967 et 1968) fait une analyse remarquable des réseaux constituants qui aboutissent à la séparation des contraintes ceci avec un interféromètre de Mech-Zender et un de Michelson.

IV.1.4.1. Méthode par simple exposition

On place un échantillon parfaitement plan, d'épaisseur e constante sur le trajet lumineux d'un bras d'un interféromètre de Michelson ou de Mach-Zender, règlé à la teinte plate (voir figure 18 les schémas de ces interféromètres). (Dans tout ce qui suit, les calculs seront faits pour un Mach-Zender).

Le modèle reçoit ensuite les charges qui produisent la contrainte à 2 dimensions. Appelons I le faisceau lumineux ayant traversé le modèle et II le faisceau de référence. En un point P du modèle, les contraintes σ_1 et σ_2 vont créer les indices n_1 et n_2, et l'épaisseur e sera devenue e'. Appelons enfin n l'indice de l'air.

On décompose le faisceau incident en deux lumières linéaires orthogonales selon les directions de σ_1 et σ_2. Appelons I_1 et I_2 ces lumières. Considérons les rayons homologues II_1 et II_2 provenant de la décomposition selon les mêmes axes du faisceau de référence.

.../

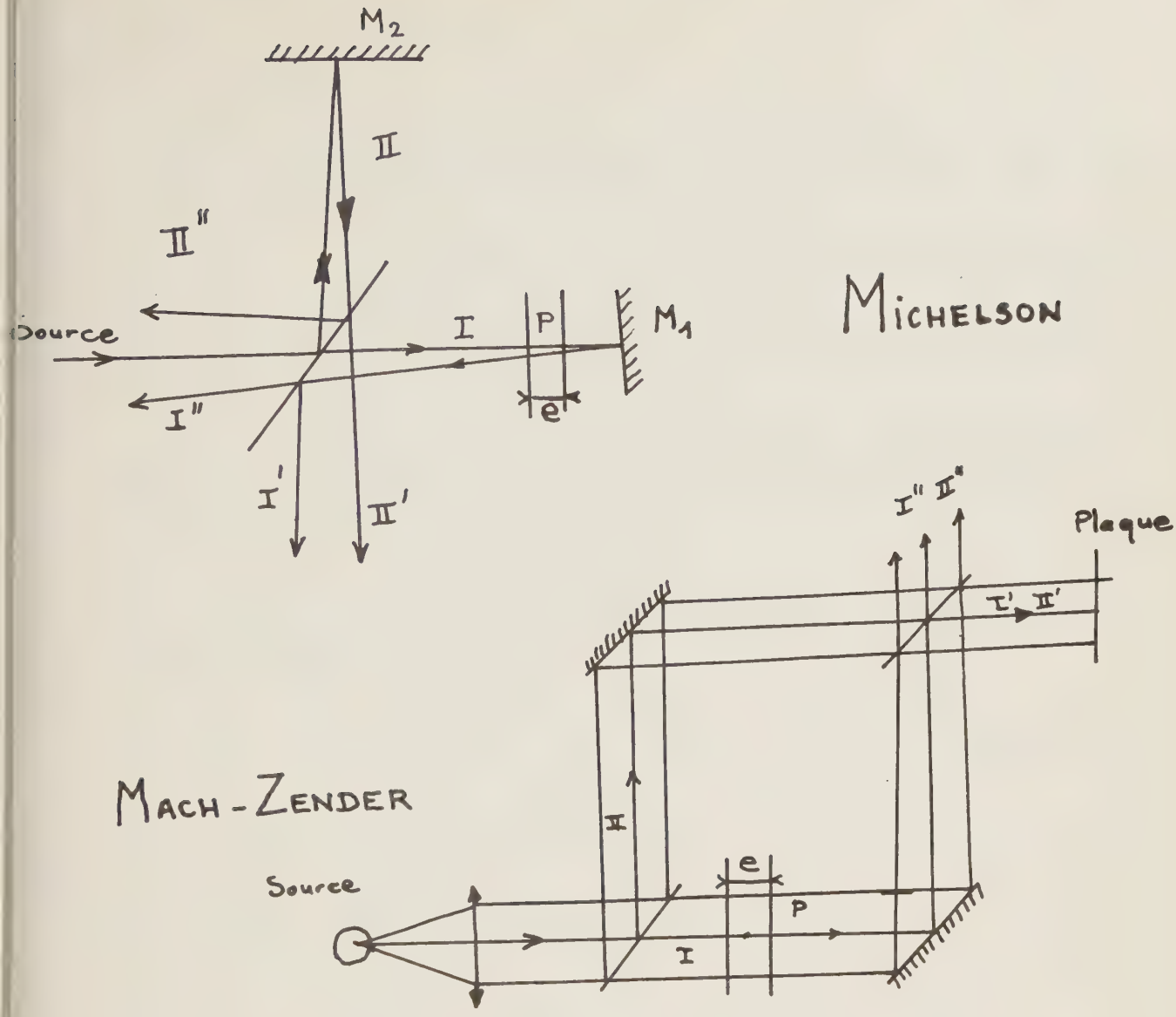


Figure 18

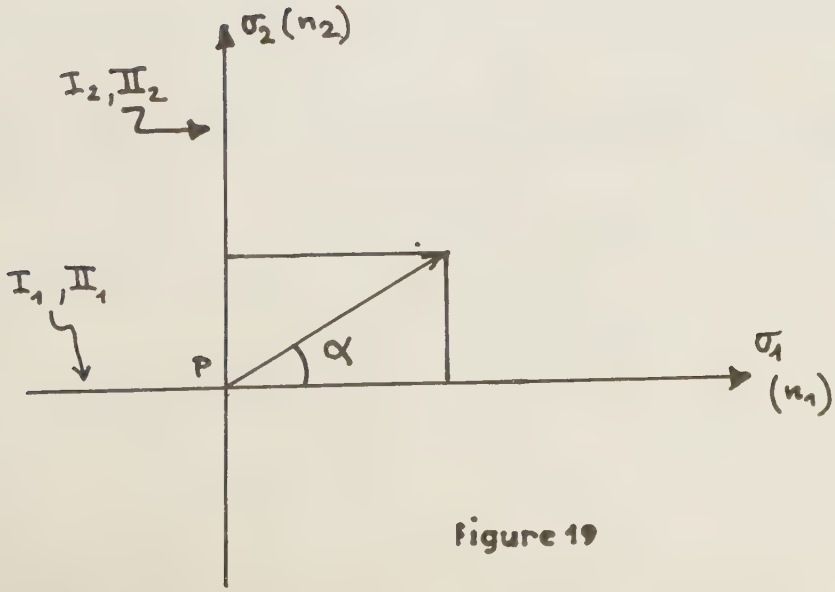


Figure 19

Entre I_1 et II_1, la différence de chemin optique est : $\delta_1 = (n_1 - n)e'$. De même, entre I_2 et II_2, elle est : $\delta_2 = (n_2 - n)e'$.

Soit I_0 l'intensité de la source, et E son amplitude. Chaque faisceau traverse deux fois une lame semi-transparente. Les intensités I' ou II' valent donc $I_0/4$ et l'amplitude de sortie E/2.

Pour décrire totalement la source lumineuse, il faut encore repérer la direction α du vecteur instantané d'amplitude E (voir figure 19).

A la sortie de l'interféromètre, on observera les amplitudes suivantes :

$$\begin{cases} E_{I_1} = E/2 \cos\alpha \\ E_{II_1} = E/2 \cos\alpha \, e^{i\varphi_1} \\ E_{I_2} = E/2 \sin\alpha \\ E_{II_2} = E/2 \sin\alpha \, e^{i\varphi_2} \end{cases} \qquad (40)$$

avec
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - n)\, e' \\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 - n)\, e' \end{cases} \qquad (41)$$

Les amplitudes résultantes après interférence sont, suivant σ_1 et σ_2 :

$$\begin{cases} E_1 = E_{I_1} + E_{II_1} = E/2 \cos\alpha \left[1 + e^{i\varphi_1}\right] \\ E_2 = E_{I_2} + E_{II_2} = E/2 \sin\alpha \left[1 + e^{i\varphi_2}\right] \end{cases} \qquad (42)$$

.../

Ces deux systèmes de franges sont indépendants car les lumières qui les forment sont polarisées orthogonalement.

Les intensités instantanées selon σ_1 et σ_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} J_1 = E_1 . E_1^* = E^2/_2 \cos^2\alpha \left[1 + \cos\varphi_1\right] \\ J_2 = E_2 . E_2^* = E^2/_2 \sin^2\alpha \left[1 + \cos\varphi_2\right] \end{cases} \qquad (43)$$

Si la source lumineuse utilisée est une lumière monochromatique naturelle (Lampe à vapeur de sodium par exemple) ou si elle est un laser non polarisé ou polarisé circulairement, il n'y a pas d'axe privilégié et le temps d'intégration est tel que :

$$< \sin^2\alpha > = < \cos^2\alpha > = \tfrac{1}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} < J_1 > = I_1 &= \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\varphi_1\right] \\ < J_2 > = I_2 &= \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\varphi_2\right] \end{aligned} \qquad (44)$$

L'intensité totale sur la plaque photographique sera : $I = I_1 + I_2$

soit :

$$\boxed{I = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right]} \qquad (45)$$

Nous allons relier les déphasages $(\varphi_1 + \varphi_2)$ et $(\varphi_1 - \varphi_2)$ aux contraintes.

Les équations (41) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[n_1 + n_2 - 2n\right] e' \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[n_1 - n_2\right] e' \end{cases} \qquad (46)$$

.../

Si n_0 est l'indice du milieu non sollicité, les formules (29) permettent d'écrire :

$$\boxed{\begin{cases} n_1 + n_2 = -\frac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} + \pi_{12})\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 2n_0 \\ n_1 - n_2 = -\frac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12})\,(\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases}} \qquad (47)$$

De plus, les relations (14) et (15) permettent de relier e à e' :

$$\boxed{e' = e + \delta e = e\left[1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]} \qquad (48)$$

En reportant (47) et (48) dans (46) il vient :

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\, e\left[-\frac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} + \pi_{12})(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(n_0 - n)\right]\left[1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\, e\left[-\frac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12})(\sigma_1 - \sigma_2)\right]\left[1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{cases} \qquad (49)$$

Nous allons chiffrer les diverses constantes pour deux corps différents, utilisés en photoélasticimétrie :

Matériau	n_0	ν	E	limite élastique kg/cm²	π_{11}	π_{12}
					10^{-7}. cm²/kg	
CR 39	1,5	0,4	20.000	~ 200	8,9	32,6
Araldite B	1,5	0,45	35.000	~ 200	-15	-55

Les mesures de photoélasticimétrie se font toujours assez loin de la limite élastique, ce qui veut dire que $(\sigma_1 + \sigma_2)$ sera de l'ordre de quelques kg/cm².

.../

Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \simeq 10^{-3} \ll 1}$$

Cette relation permet de simplifier les relations (49) qui deviennent:

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi e}{\lambda}\left[A(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(n_0 - n)\right] \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi e}{\lambda} \times B(\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases}} \quad (50)$$

avec $\boxed{A = -\frac{1}{2} n_0^3 (\pi_{11} + \pi_{12}) \text{ et } B = -\frac{1}{2} n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12})}$

L'équation (45) devient alors :

$$\boxed{I = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\frac{2\pi e}{\lambda}\left[A(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(n_0 - n)\right] \cos\frac{2\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2)\right]} \quad (51)$$

<u>Remarque</u> : le terme en $2(n_0 - n)$ de l'équation (51) peut être compensé en déplaçant le miroir du bras II de l'interféromètre de la longueur :

$$\Delta = \frac{n_0 - n}{n} e$$

L'intensité de la formule (51) est enregistrée sur une plaque photographique qui est dépouillée au microdensitomètre. L'interféromètre fonctionnant en lumière parallèle, on verra sur la plaque l'ombre portée de l'objet, striée de franges noires et blanches formant deux familles que nous allons étudier.

.../

IV.1.4.1.1. Analyse des réseaux obtenus

- On appelle Isochrome le lieu des points où $\sigma_1 - \sigma_2$ = cte
- On appelle Isopache le lieu des points où $\sigma_1 + \sigma_2$ = cte

Il existe des points de l'échantillon où les contraintes sont telles que le deuxième cosinus de la relation (51) est nul. Pour ces points,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi e}{\lambda}\,B\,(\sigma_1 - \sigma_2), \text{ soit}$$

$$\boxed{\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2k+1}{4Be}\,\lambda} \qquad (52)$$

Le lieu de ces points est donc les isochromes d'ordre 1/4, 3/4, etc, pour le Michelson; et d'ordre 1/2, 3/2, etc, pour le Mach-Zendor. L'intensité y est constante et vaut I_0 /2.

- Regardons maintenant le lieu des points où $\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = \text{cte}}$

Le premier cosinus de la formule (51) va alors conserver une valeur fixe V. En se déplaçant sur cette isopache, on va croiser les isochromes vues ci-dessus.

L'équation (45) s'écrivant alors :

$$I = \frac{I_0}{2}\left[(1 + V \cos \frac{2\pi}{\lambda}\, e.B\,(\sigma_1 - \sigma_2)\right] \qquad (53)$$

De part et d'autre des isochromes précédents le cosinus restant change de signe et par conséquent chaque fois que l'on traverse une isochrome, l'isopache sombre devient claire et inversement. (Voir sur la figure 20 une telle répartition d'intensité).

- Regardons enfin le lieu des points où $\boxed{\sigma_1 - \sigma_2 = \text{cte}}$

Dans le cas où la constante est différente de celle de la formule (52).

.../

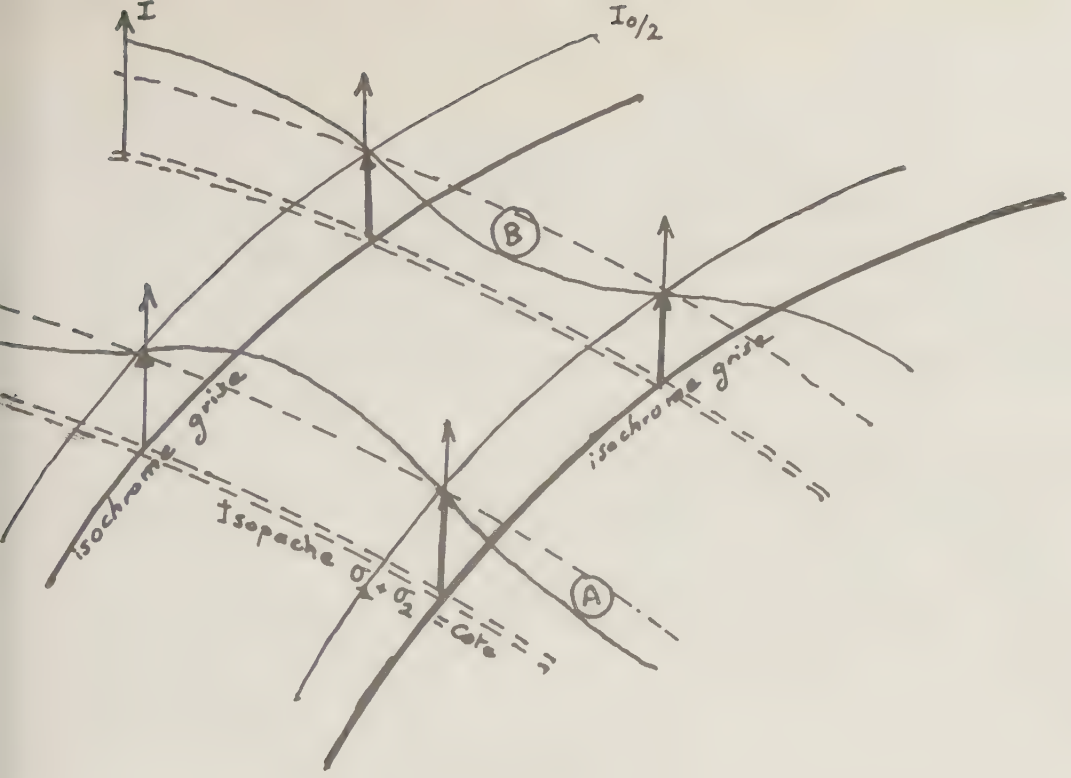


figure 20

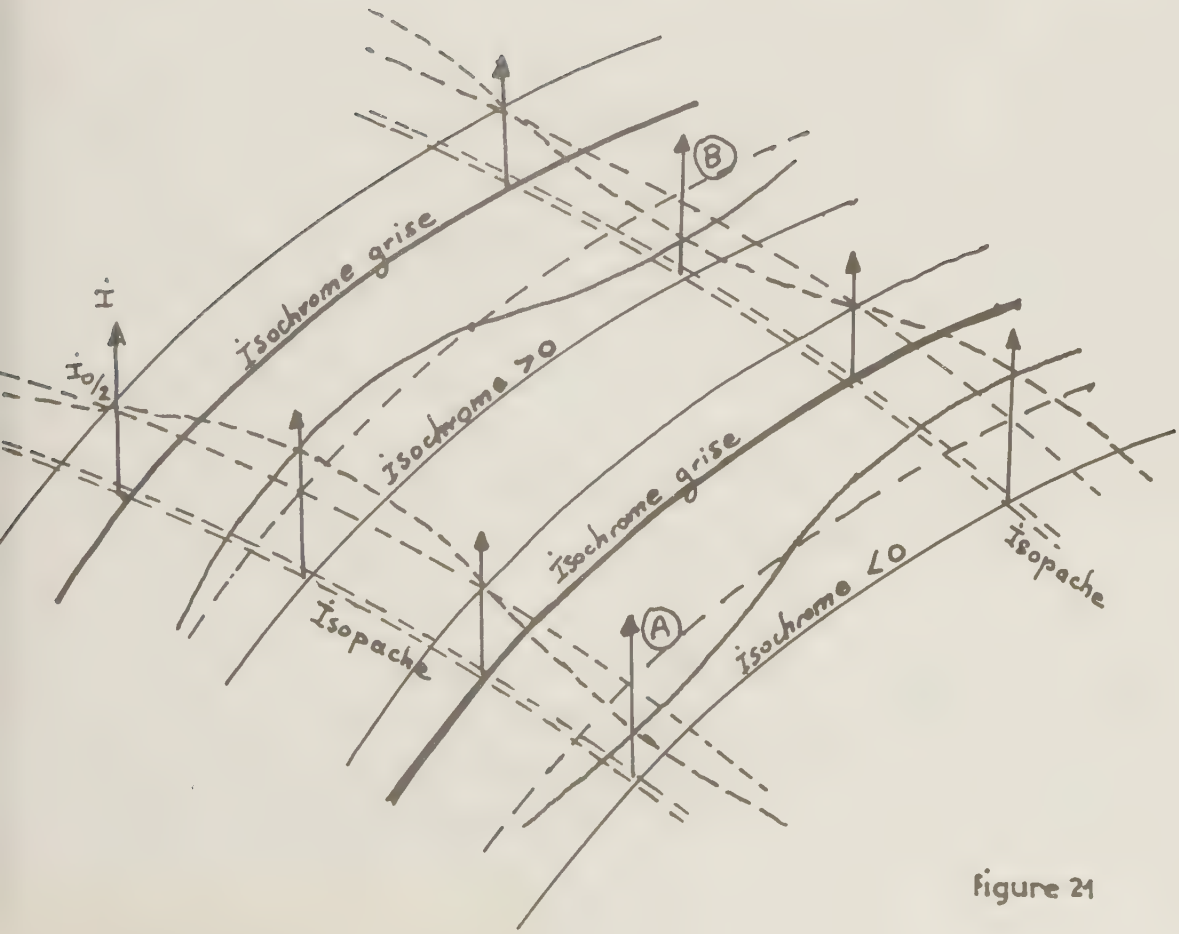


figure 21

(Voir figure 21). Dans ce cas, c'est le deuxième cosinus de la formule (50) qui est constant. En se déplaçant selon l'une de ces isochromes, on va croiser des isopaches pour lesquelles V=0. Donc il y aura aussi inversion du crontraste à la traversée de ces isopaches.

Il s'en suit une modulation autour de la valeur $I_0/2$ avec des points d'intensité <u>minimum</u> définis par :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi = \frac{2\pi e}{\lambda}\left[A(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(n_0 - n)\right] \qquad (k \text{ entier})$$

soit pour :

$$\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{k\lambda}{Ae} - \frac{2(n_0 - n)}{A}} \qquad (54)$$

avec $\begin{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots & \text{pour le Michelson} \\ k = 0, \pm 2, \pm 4 \ldots\ldots\ldots & \text{pour Mach-Zender} \end{cases}$

et des points d'intensité <u>maximum</u> définis par :

$$\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{(2k+1)\lambda}{2Ae} - \frac{2(n_0 - n)}{A}} \qquad (55)$$

qui sont les isopaches d'ordre :

$$\begin{cases} \pm 0{,}5, \pm 1{,}5, \pm 2{,}5 \ldots\ldots & \text{pour le Michelson} \\ \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3 \ldots\ldots & \text{pour le Mach-Zender} \end{cases}$$

Si l'on change la constante de $\boxed{\sigma_1 - \sigma_2 = cte}$ de manière à changer le signe du deuxième cosinus de la formule (50), le long de l'isochrome ainsi définie, le même phénomène que ci-dessus va apparaître mais avec un remplacement des minima par les maxima et vice-versa.

.../

A

B

Photo 2

L'oeil regardant les franges est capable de voir de façon continue le lieu des minima sous la forme de franges sombres, le reste du champ paraissant quasi-uniforme. Il est également capable grâce à sa physiologie de suivre une courbe de densité constante. Il verra donc les isochromes grises.

Par exemple, sur les figures 20 et 21, l'oeil verra en continu les règions A et B.

Le spectateur aura donc l'impression que les isopaches se déphasent spatialement d'une demi-longueur d'onde lors de la traversée des isochromes grises.

La configuration du champ ressemble alors à la photo 2.

En résumé, il apparait sur le cliché, par exemple pour le Michelson :

- Les isochromes d'ordres $\pm$ 0,25, $\pm$ 0,75, etc
- Les isopaches d'ordres 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2 etc, d'une part
  $\pm$ 0,5, $\pm$ 1,5, $\pm$ 2,5 etc, d'autre part

qui sont respectivement sombres et claires ou claires et sombres suivant que l'on se trouve dans la région A ou dans la règion B.

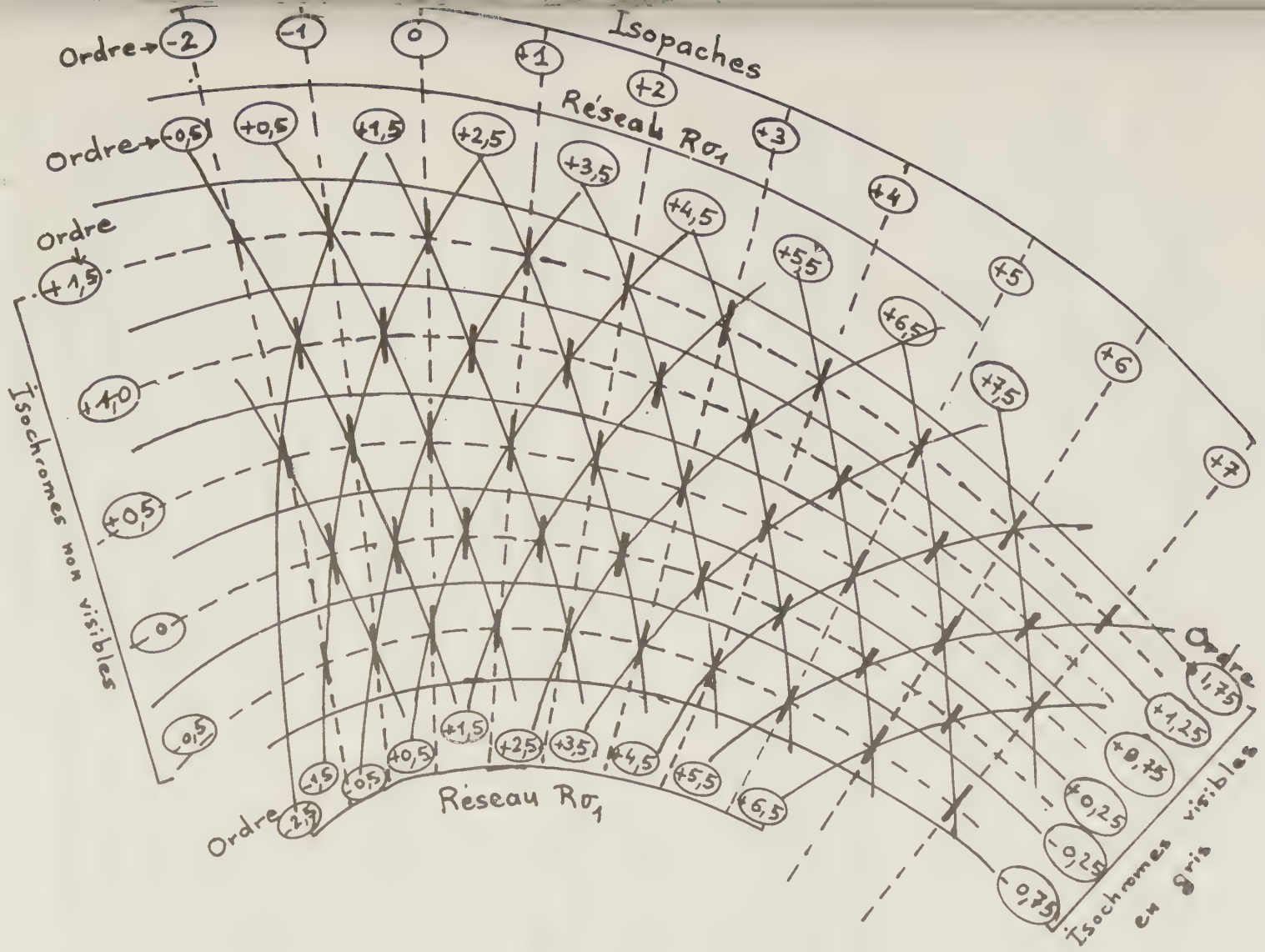
IV.1.4.1.2. Réseaux composants

Plaçons devant le système au point M un polariseur linéaire dans la direction de σ_1. Les équations (44) deviennent alors :

$$R_{\sigma_1} \begin{cases} I_1 = \frac{I_0}{4}\left[1+\cos\varphi_1\right] \\ I_2 = 0 \end{cases} \qquad (56)$$

Il en est de même si l'on place un polariseur parallèlement à σ_2 :

.../



Réseaux composants (Michelson)

figure 22

$$R_{\sigma_2} \begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\varphi_2\right] \end{cases} \qquad (57)$$

Si l'on remplace dans ces deux systèmes d'équations, φ_1 et φ_2 par leur valeur en fonction de σ_1 et σ_2, il vient : (équation 50)

$$I_{\sigma_1} = \frac{I_0}{4}\left[1+\cos\frac{2\pi e}{\lambda}\left\{B(\sigma_1-\sigma_2)+A(\sigma_1+\sigma_2)+2(n_0-n)\right\}\right] \qquad (58)$$

$$I_{\sigma_2} = \frac{I_0}{4}\left[1+\cos\frac{2\pi e}{\lambda}\left\{-B(\sigma_1-\sigma_2)+A(\sigma_1+\sigma_2)+2(n_0-n)\right\}\right] \qquad (59)$$

Ces deux réseaux de franges (qui ne sont visibles que localement) sont appelés <u>réseaux composants</u>. En effet, la somme de leurs <u>intensités</u> donne le système de franges isochromes-isopaches décrit précédemment. Il sont tous deux les lignes d'égal chemin optique dans les directions des lignes neutres des lames.

Voir figure 22 comment sont répartis ces réseaux.

<u>Remarque</u> : Les équations (58) et (59) permettent de décrire une méthode de mesure directe des constantes A et B en utilisant comme objet connu une poutre en flexion pure.

IV.1.4.2. <u>Méthode par double exposition</u>

Dans la majorité des cas, il n'est pas possible d'obtenir une teinte plate uniforme dans le champs de l'interféromètre lorsque l'objet photoélastique y est placé. En effet, cela exige une précision sur le parallélisme et le surfaçage des faces des maquettes qui est contraire à l'utilisation d'une méthode industrielle. Il faut alor utiliser une méthode par double exposition pour éliminer la fonction objet. Cette méthode est basée sur les phénomènes de moirés que nous allons décrire maintenant brièvement.

.../

IV.1.4.2.1. Phénomène de moirure

Le phénomène de "moiré" fut décrit pour la première fois par Lord Rayleigh en 1874 [1]. Il a été remarquablement expliqué dans des cas complexes par J.EBBENI [2], notamment dans les cas où intervient la diffraction. Nous nous limiterons ici au cas géométrique c'est à dire pour des fréquences spatiales inférieures à 20 traits par millimètre, cas dans lesquels la diffraction est négligeable.

Considérons la figure 23.

Nous y voyons deux réseaux plans composés chacun d'une série de traits noirs espacés par des traits clairs. La supperposition de ces deux réseaux fait apparaitre des familles de franges dites "franges de moiré". L'une est composée de franges sombres et l'autre de franges claires.

La famille de franges d'intensité minimum constitue le lieu des points où un trait noir d'un des réseaux vient s'insérer exactement entre deux traits noirs consécutifs de l'autre réseau : les axes de ces franges sont représentés par les lignes AA', BB', etc sur la figure. Ces franges d'intensité minimum sont séparées par des franges d'intensité maximum, lieux des points où les traits noirs des deux réseaux coïncident. Leus axes sont représentés par les lignes $A_1A'_1$, B_1 B'_1, etc.

On remarque que l'ensemble des traits noirs du premier réseau découpe avec ceux du second réseau, un ensemble de quadrilatères. Chaque quadrilatère est formé par l'intersection de deux traits noirs successifs du premier réseau avec deux traits noirs successifs de l'autre réseau.

En reliant entre elles les plus petites diagonales de ces quadrilatères, on obtient la famille des franges d'intensité maximum. Il en est de même pour les franges d'intensité minimum en consi-

.../

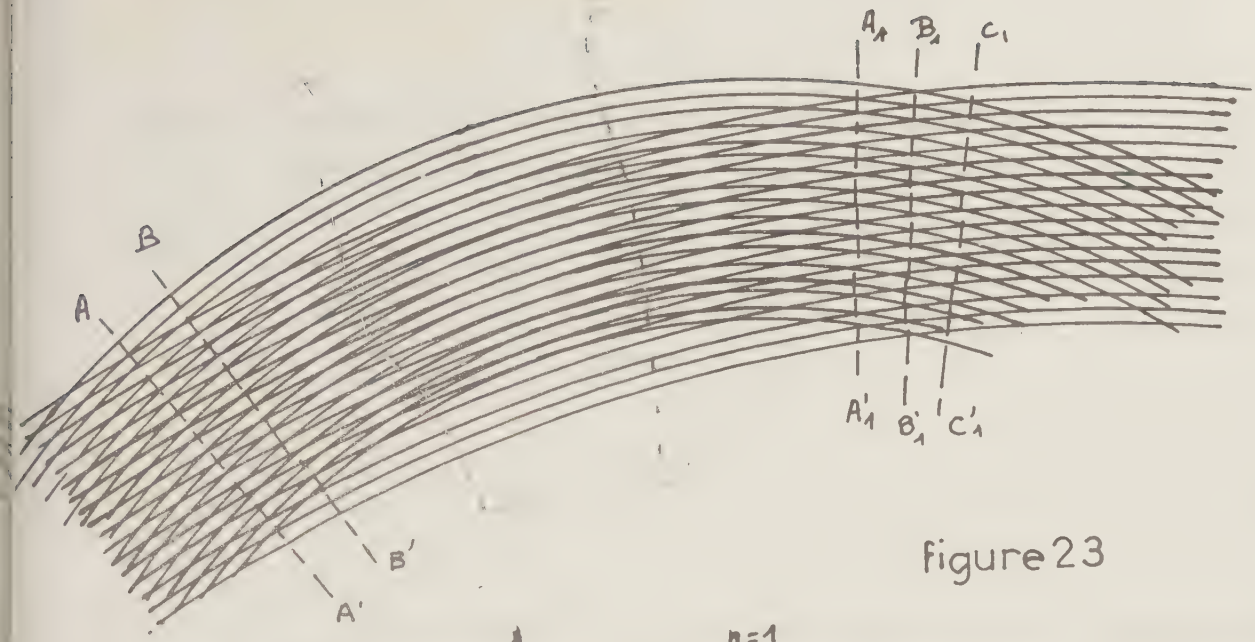


figure 23

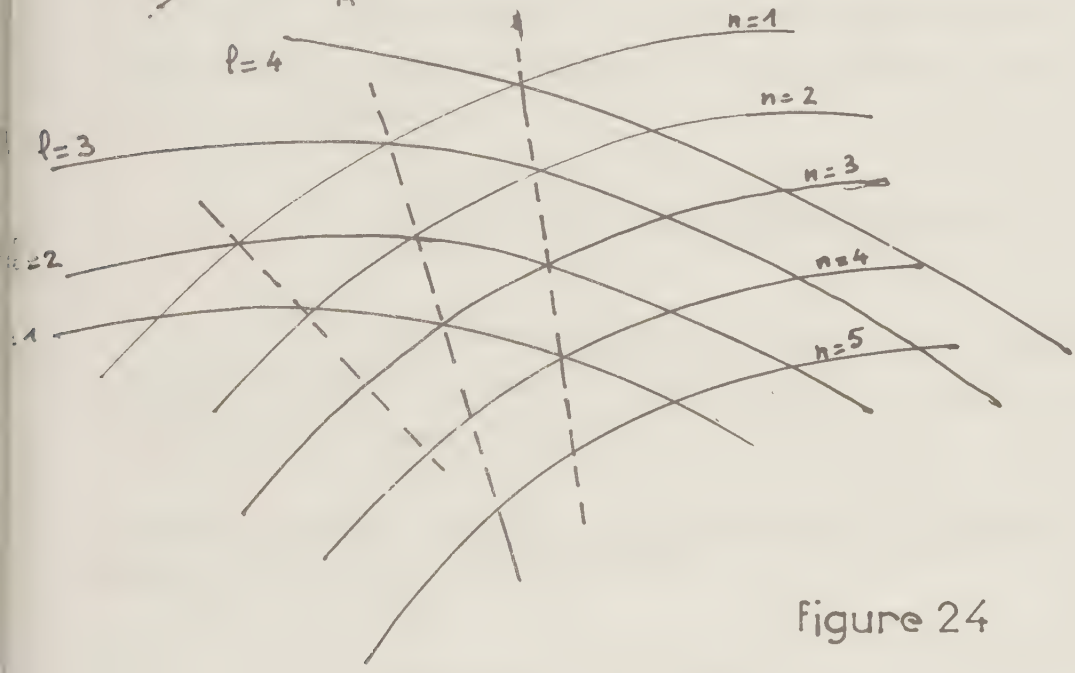


figure 24

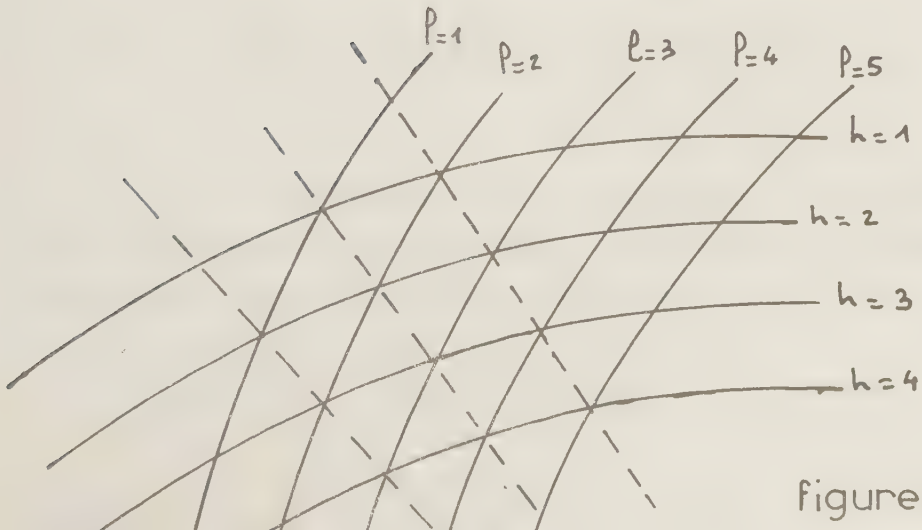


figure 25

additif ou soustractif suivant le signe qu'il faut prendre. Ainsi pour les figures (24) et (25), il faut prendre respectivement les signes (+) et (-). Il est à remarquer que le signe dans la relation (60) peut changer d'une région à l'autre sur la surface de superposition suivant la configuration des traits, la courbe limitant deux régions de signes différents étant caractérisée par :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \qquad (62)$$

Le système de lignes confondues avec les plus grandes diagonales est appelé système de franges de second ordre. Ces franges ne sont pas visibles.

IV.1.4.2.2. Enregistrement des moirés

Le modèle n'étant pas parfaitement plan parallèle, les miroirs de l'interféromètre ayant des défauts, l'épaisseur e de la formule (51) va dépendre de x et de y.

Prenons d'abord une photo en ne sollicitant pas l'objet. (c'est à dire que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)

L'équation (51) devient :

$$I = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \; 2(n_0 - n) \; e \; (x,y) \right] \qquad (63)$$

Pour augmenter la définition des moirés, un des miroirs de l'interféromètre est déréglé de manière à introduire un coin d'air, par exemple par une rotation autour de l'axe des y. L'intensité devient :

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \left\{1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \; 2 \; (n_0 - n) \; e \; (x,y) + \frac{2\pi x}{p} \right] \right\} \qquad (64)$$

.../

Le nombre de franges ainsi formées doit être de l'ordre de quelques unités par millimètre. Ainsi la diffraction est négligeable, et l'erreur sur la mesure des contraintes inférieures à 1%. En effet, pour une pupille de 10 cm, une épaisseur d'objet de 10 mm, et 2traits/mm par exemple, (voir figure 26).

$\operatorname{tg} \theta = 5.10^{-4}$ rad., $de = 5.10^{-2}$ mm, donc $\frac{de}{e} = 0,5\ \%$

<u>Prenons ensuite une deuxième photo en cha geant le modèle</u>, mais sans toucher aux autres règlages.

L'équation (51) devient :

$$I_2 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} e(x,y)\left[2\ (n_0 - n) + A(\sigma_1 + \sigma_2)\right] + \frac{2\pi x}{p} \right\} \times$$

$$\times \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ B\ (\sigma_1 - \sigma_2)\ e\ (x,y) \right\} \qquad (65)$$

Après développement les deux plaques photographiques auront pour densités (en supposant que l'on se soit mis dans les conditions linéaires d'enregistrement) :

$$D_1 = \frac{D_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}\ 2\ (n_0 - n)\ e\ (x,y) + \frac{2\pi x}{p} \right] \right\} \qquad (66)$$

et

$$D_2 = \frac{D'_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} e(x,y) \left[2(n_0 - n) + A\ (\sigma_1 + \sigma_2)\right] + \frac{2\pi x}{p} \right\} \times$$

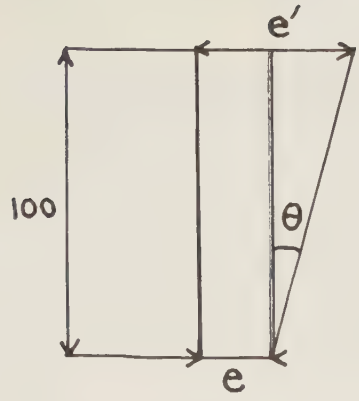
$$\times \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[B\ (\sigma_1 - \sigma_2)\ e\ (x,y) \right] \qquad (67)$$

(Il est toujours possible de régler le temps de pose pour que $D_0 = D'_0$)

Les transmissions de ces plaques sont respectivement :

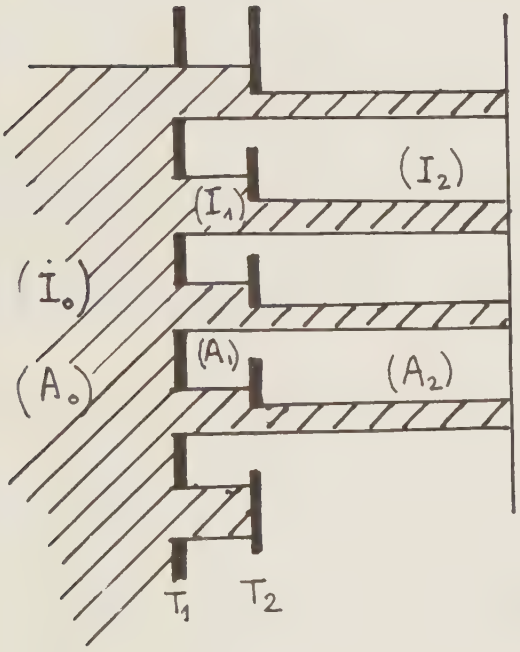
$$T_1 = \frac{1}{10^{D_1}} \quad , \quad T_2 = \frac{1}{10^{D_2}} \qquad (68)$$

.../



$e' = e + de$

figure 26



Diffuseur

figure 27

A la restitution, les deux plaques enregistrées sont superposées exactement et éclairées de façon uniforme.

L'intensité transmise dépend de la cohérence de la source lumineuse : (voir figure 27)

- Si l'éclairage est incohérent,

$$I_1 = I_0 \times T_1 \; ; \quad \boxed{I_2 = I_0 \times T_1 \times T_2} \tag{69}$$

- Si l'éclairage est cohérent,

$$A_1 = A_0 T_1 \; ; \; A_2 = A_0 T_1 T_2 \; ; \; I_0 = A_0^{\,2}$$

$$\boxed{I_2 = I_0 . \, T_1^{\,2} . \, T_2^{\,2}} \quad \text{(voir figure 27)} \tag{70}$$

Donc en éclairage incohérent , $\dfrac{I_2}{I_0} = \dfrac{1}{10^{D_1 + D_2}}$ (71)

et en éclairage cohérent, $\dfrac{I_2}{I_0} = \dfrac{1}{10^{2(D_1 + D_2)}}$ (72)

Posons

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{2\pi}{\lambda} e(x,y) \left[2(n_0 - n)\right] + \frac{2\pi x}{p} \\ v &= \frac{2\pi}{\lambda} A \, (\sigma_1 + \sigma_2) \, e \, (x,y) \\ w &= \frac{2\pi}{\lambda} B \, (\sigma_1 + \sigma_2) \, e \, (x,y) \\ D &= D_1 + D_2 \end{aligned}} \tag{73}$$

.../

Les équations (66) et (67) permettent d'écrire :

$$D = \frac{D_0}{2}\left[2 + \cos u + \cos(u+v)\cos w\right] \qquad (74)$$

Soit encore

$$\boxed{D = \frac{D_0}{2}\left[2 + \cos u(1 + \cos v \cos w) - \sin u \sin v \cos w\right]} \qquad (75)$$

Etudions les variations du second membre de l'équation (75)

Les équations (71) et (72) montrent bien que l'intensité vue sera maximale quand $D = 0$ ($I_2 = I_0$) et qu'elle sera minimale pour D maximum.

Donc <u>au profil des franges prés, les variations de l'équation (75) seront le négatif de l'intensité</u>. En particulier le lieu des points maxima de l'équation (75) sera le lieu des points d'intensité minimale de (71) et (72) et réciproquement.

Etudions d'abord le cas où $\cos w = 0$ (isochromes d'ordre 1/4, 3/4 etc, pour le Michelson)

Dans ce cas, $D = \frac{D_0}{2}\left[2 + \cos u\right]$

Le long de ces courbes, (voir figure 28) D est modulé à la fréquence spatiale des u avec une amplitude $\frac{D_0}{2}$ à $\frac{3}{2}D_0$. Nous noterons :

$$D = \frac{D_0}{2}\left[2 + \cos u\right]\left(\frac{1}{2} \text{ ——— } \frac{3}{2}\right)$$

Propageons nous maintenant le long des isopaches :

<u>Isopache $\cos v = 1$</u> $\Rightarrow D = \frac{D_0}{2}\left[2 + \cos u\,(1+\cos w)\right]$

.../

Sur l'isochrome $\cos w = 1$, $D = D_0 (1+ \cos u)$ $(0 - 2)$

" $\cos w = 0$, $D = \frac{D_0}{2} (2+ \cos u)$ $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})$

" $\cos w = -1$, $D = D_0$ (1)

<u>Isopache $\cos v = 0$</u> $\Rightarrow D = \frac{D_0}{2} [2 + \cos u - \sin u \cos w]$

Sur l'isochrome $\cos w = 1$, $D = D_0[1+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u+ \frac{\pi}{4})]$ $(1- \frac{1}{\sqrt{2}} — 1+ \frac{1}{\sqrt{2}})$

" $\cos w = 0$, $D = \frac{D_0}{2} (2 + \cos u)$ $(\frac{1}{2} — \frac{3}{2})$

" $\cos w = -1$, $D = D_0[1+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u- \frac{\pi}{4})]$ $(1- \frac{1}{\sqrt{2}} — 1+ \frac{1}{\sqrt{2}})$

<u>Isopache $\cos v = -1$</u> $\Rightarrow D = \frac{D_0}{2} [2 + \cos u(1 -\cos w)]$

Sur l'isochrome $\cos w = 1$, $D = D_0$ $(1 — 1)$

" $\cos w = 0$, $D = \frac{D_0}{2} (2 + \cos u)$ $(\frac{1}{2} — \frac{3}{2})$

" $\cos w = -1$, $D = D_0(1+ \cos u)$ $(0 — 2)$

Tous ces résultats sont portés sur la figure 28.

Si le système optique regardant les franges, qui est un filtre passe-bas en fréquences spatiales, coupe la fréquence des u tout en transmettant celles des v et des w, l'image filtrée laissera apparaitre uniquement le lieu des maxima de la figure 28.

On observera comme précédemment, d'une part en grisé uniforme les isochromes d'ordre 1/4, 3/4 etc..(pour le Michelson) et d'autre part dans les régions A définies comme au paragraphe IV.1.4.1. les isopaches d'ordre : 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, etc, et dans les régions B, les isopaches d'ordres $\pm$ 0,5, $\pm$ 1,5 etc.

.../

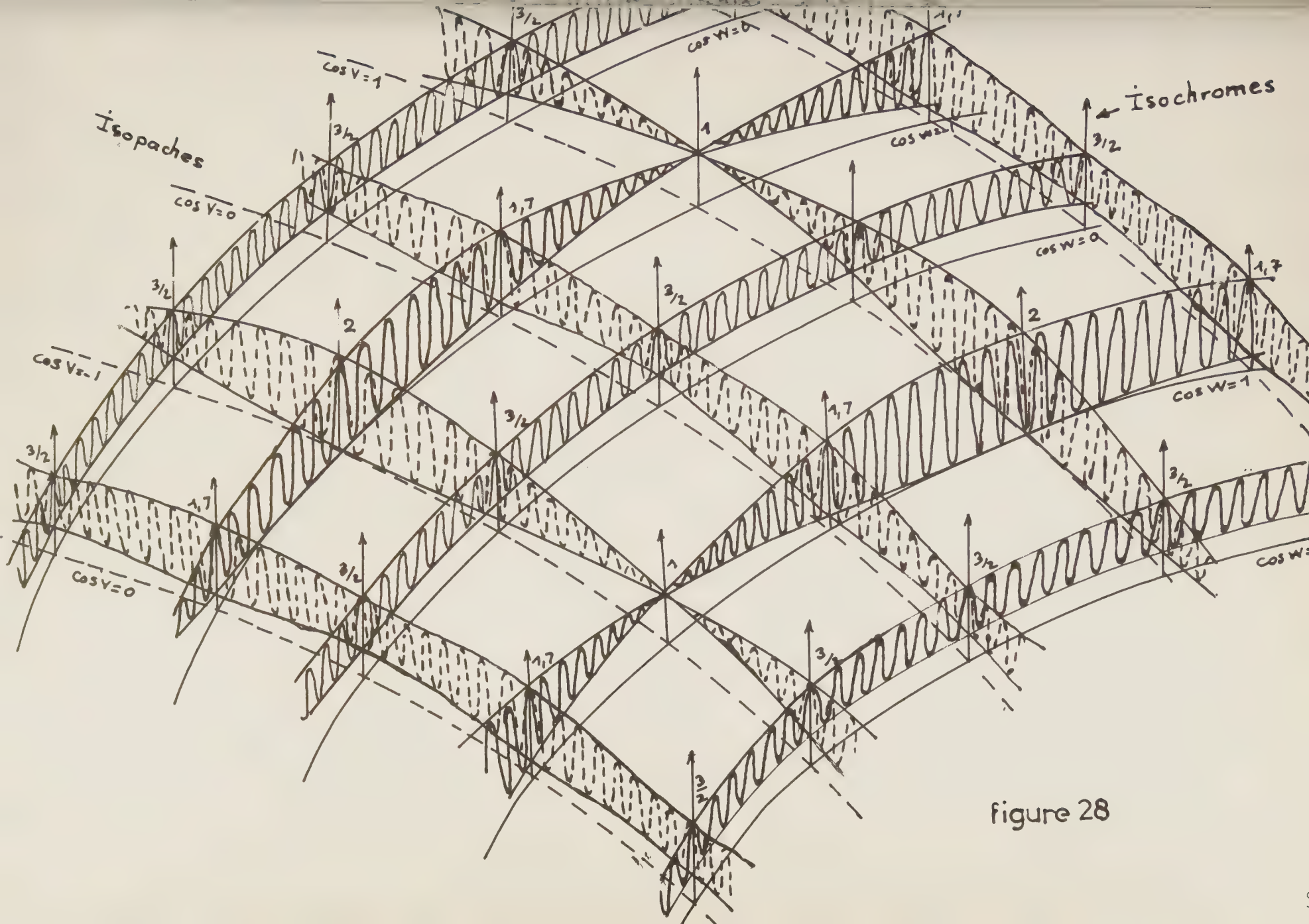
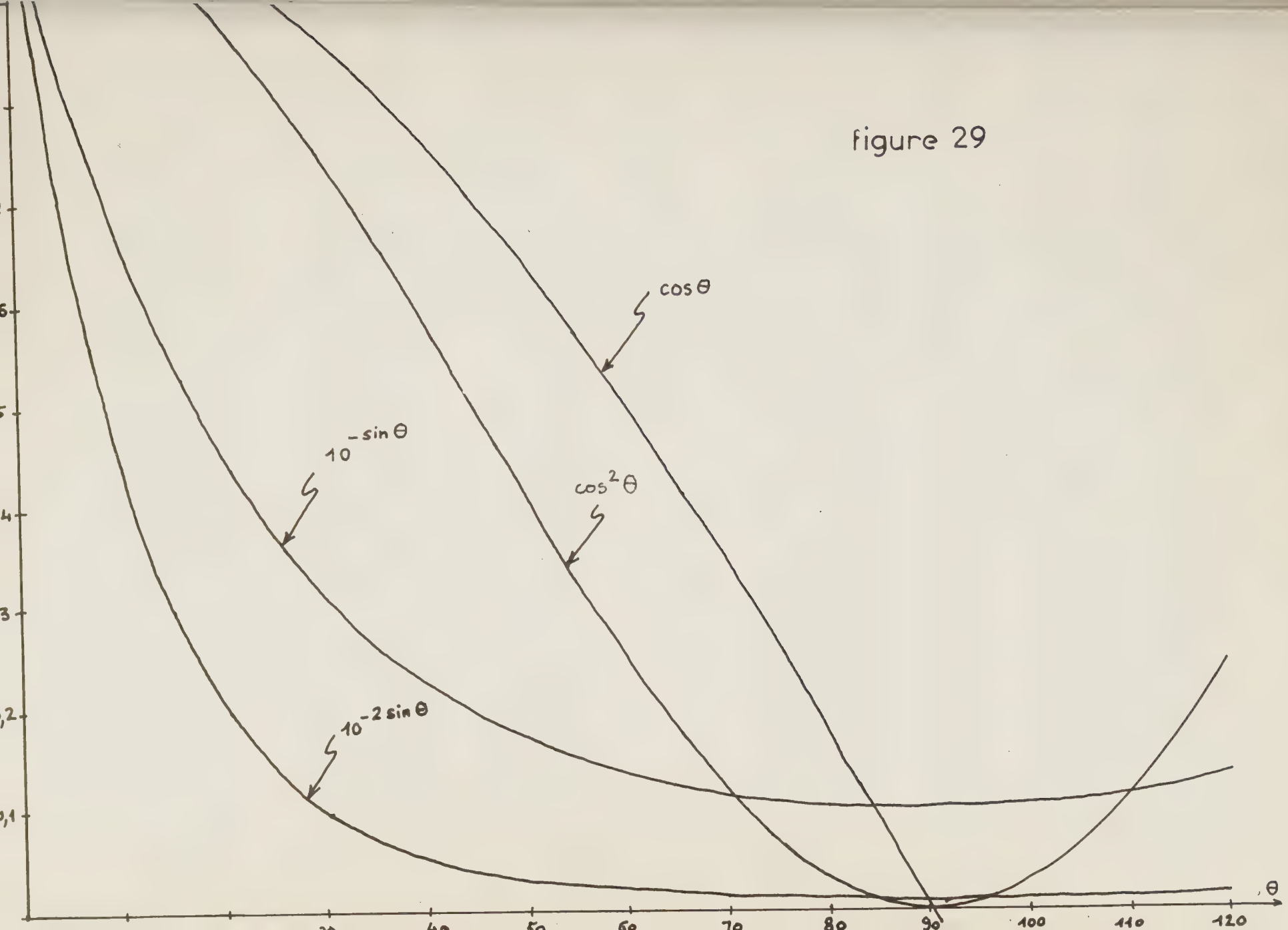

Isopaches
Isochromes
cos V=1
cos V=0
cos V=-1
cos W=0
cos W=1
3/2
1,7
2
1

figure 28

figure 29



On obtient donc rigoureusement les mêmes emplacements de franges que par la méthode par simple exposition. Seuls les profils des franges ont varié.

Dans le cas des moirés, les franges sont plus fines que dans le cas direct, la loi de variation du contraste ayant une pente plus accentuée.

Voici, pour donner un exemple, sur la figure 29, ce que donne une frange sinusoïdale ($\cos\theta$) dont l'intensité est ($\cos^2\theta$).

En éclairage incohérent, elle donnera le profil ($10^{-\sin\theta}$) et en éclairage cohérent, le profil encore plus serré ($10^{-2\sin\theta}$). Les courbes tracées font l'hypothèse que la densité maximale de la plaque est de 1 dans le premier cas, et 2 dans le deuxième cas.

IV.1.5. Méthodes holographiques

Le principe de l'holographie a été décrit pour la première fois par D.GABOR [4] en 1948. Mais sa mise en application a été entravée par le manque de sources lumineuses suffisamment cohérentes et brillantes.

L'invention du laser par SCHAWLOW, TOWNES, PROKHOROV, BASOV, et la première réalisation par MAIMAN en 1961 va permettre l'épanouissement de l'holographie et dès 1962, LEITH et UPATNICKS [5] [6] vont apporter à la méthode de D.GABOR les perfectionnements utiles.

Les première expériences d'interféromètrie holographique ont été faites en 1964 par : HORMEN [7]. Enfin, les premières applications de l'holographie à la photoélasticimétrie ont été réalisées par TAYLOR, BOWMAN, NORTH et SWINSON en 1966, [8].

.../

De la comparaison de l'holographie et l'interférométrie il vient trois remarques :

1°) l'holographie permet d'utiliser, comme surface d'onde de référence une surface ayant traversé l'objet photoélastique, ce qui est le cas en interféromètrie par double exposition.

2°) La mise en oeuvre du matériel utilisé est bien plus aisée en holographie qu'en interférométrie.

3°) La diffraction est utilisée en holographie au lieu d'être cause d'une gêne ce qui permet un pouvoir séparateur bien plus grand qu'en interférométrie.

IV.1.5.1. Méthode par simple exposition

IV.1.5.1.1. Isochromes en lumière diffuse

Prenons le schéma de la figure 30 a.

Un laser L, polarisé linéairement émet des trains d'onde quasi-monochromatique, dont la longueur de cohérence est de l'ordre de 30 cm. Une lame séparatrice S dédouble le faisceau en un faisceau R dit de référence et un faisceau destiné à éclairer l'objet O en lumière parallèle.

Un diffuseur D est introduit après l'objet O sur le faisceau objet.

Un point P de l'objet photoélastique contraint va éclairer un point M unique du dépoli D.

L'hologramme H enregistre les interférences crées par le battement du faisceau R et du faisceau diffusé par M.

.../

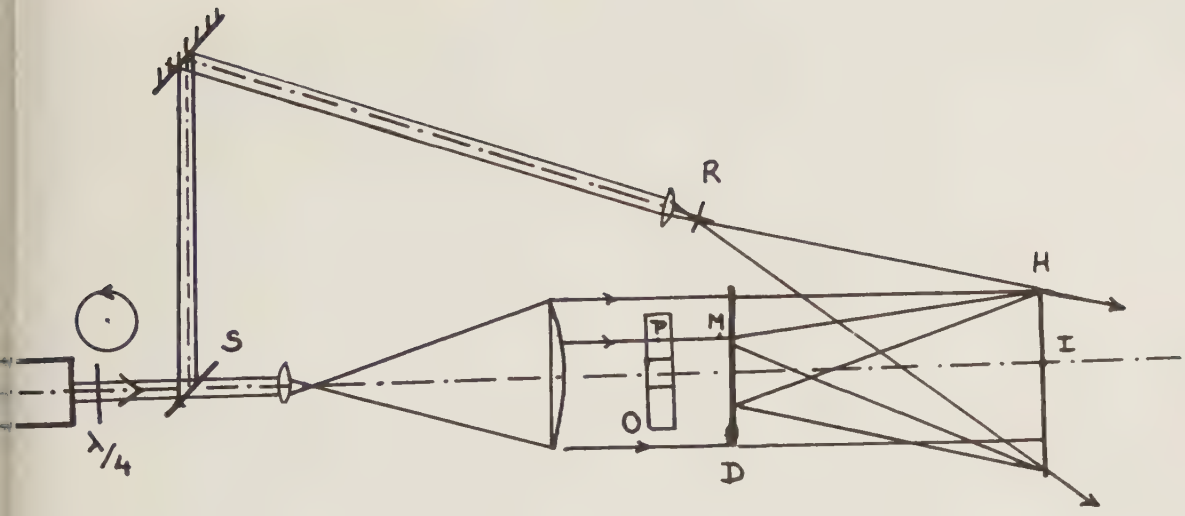


figure 30a

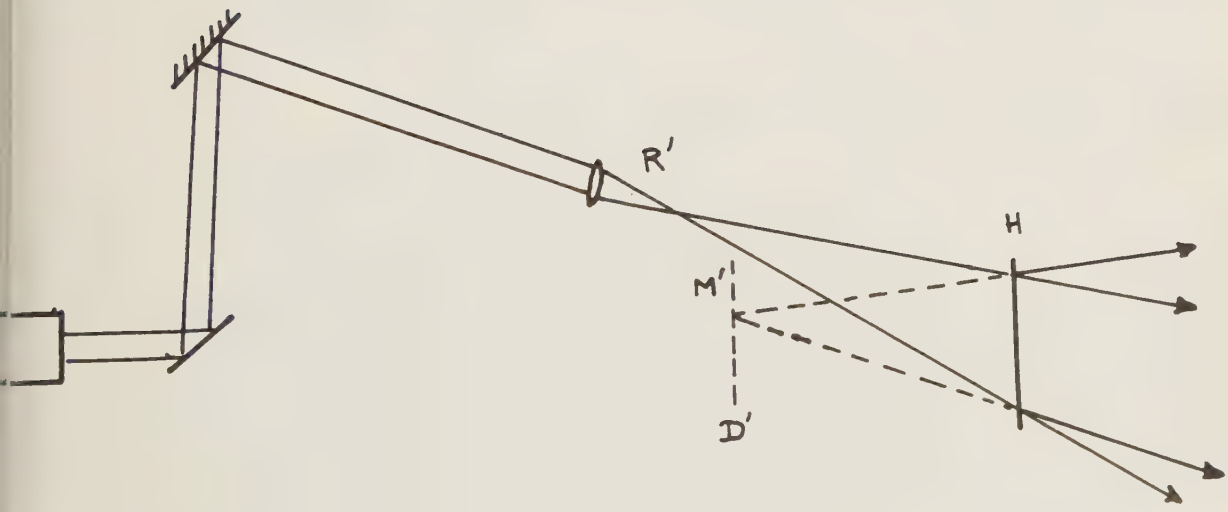


figure 30b

Comme il en est de même pour tous les points du diffuseur D, la plaque H va enregistrer un interférogramme très complexe. Elle est ensuite développée, puis éclairée avec un faisceau R' identique au faisceau de référence R (figure 30 b).

La plaque H va alors diffracter, entre autres, un faisceau donnant l'image véritable D' identique à D.

Nous allons voir ce que représente l'image D. Plaçons une lame quart d'onde convenablement orientée à la sortie du laser de manière à éclairer le modèle en lumière circulaire. Le rayon qui passe au point P peut être décomposé en deux lumières orthogonales polarisées linéairement selon les axes du biréfringent existant en P. Après traversée de l'objet O, il va donc exister deux surfaces d'ondes légèrement déphasées l'une par rapport à l'autre, et indépendantes puisque polarisées orthogonalement.

Le diffuseur D transforme ces deux surfaces d'onde selon un codage complexe, mais défini.

L'hologramme H va donc enregistrer ces deux surfaces d'ondes codées, la référence R contenant également deux références orthogonales. A la restitution, ces deux surfaces d'ondes réapparaissent et interfèrent puisque la polarisation du faisceau de référence est unique. La figure d'interférence correspondante va donc apparaitre sur le dépoli. Il y aura des franges noires chaque fois que les deux surfaces d'ondes seront en opposition de phase, soit pour :

$$\varphi = \frac{2\pi\ (n_1 - n_2)\ e}{\lambda} = (2\ k + 1)\ \pi \qquad (76)$$

Cette formule (76) est presque identique à la formule (32) du paragraphe IV.1.2.1. La formule (33) est donc appliquable. On obtient donc les isochromes sur fond blanc de la lame O. Elles

.../

Photo 3

Photo 4

sont dans le plan de l'image du dépoli D (voir photo [3]).

IV.1.5.1.2. Isoclines en lumière dirigée

Prenons le schéma de la figure 31a. Le laser L est polarisé linéairement, par exemple, verticalement. Le faisceau R va d'onc l'être aussi.

Plaçons le dépoli D avant l'objet O et intercalons entre les deux un polariseur linéaire PLH orienté horizontalement. Le diffuseur D dépolarise la lumière du laser et le polariseur PLH envoie donc sur l'objet O une lumière polarisée orthogonalement au faisceau de référence.

Supposons l'objet non biréfringent.

Dans ce cas l'hologramme H reçoit deux surfaces d'ondes incapables d'interférer. Il enregistre donc un fond continu et ne diffractera rien dans la direction de D', (figure 31b) quand il sera éclairé par l'onde R'.

Dès que l'objet devient biréfringent, au contraire, dans le plan de H, au point I par exemple, il va exister une composante de la lumière qui sera parallèle à la polarisation du faisceau de référence, et la plaque enregistrera une modulation qui correspondra à une image M' de M.

L'extinction apparaitra de nouveau, soit quand le déphasage sera de $2K\pi$, soit quand l'un des axes du biréfringent sera parallèle à la direction de polarisation de PLH.

A la restitution le champ de franges est donc composé des isochromes sur fond noir et des isoclines de la direction du polariseur. (voir photo [4])

Dans ce cas, la dimension de la pupille O qui regarde l'image P' intervient dans la définition des isoclines et des isochromes

.../

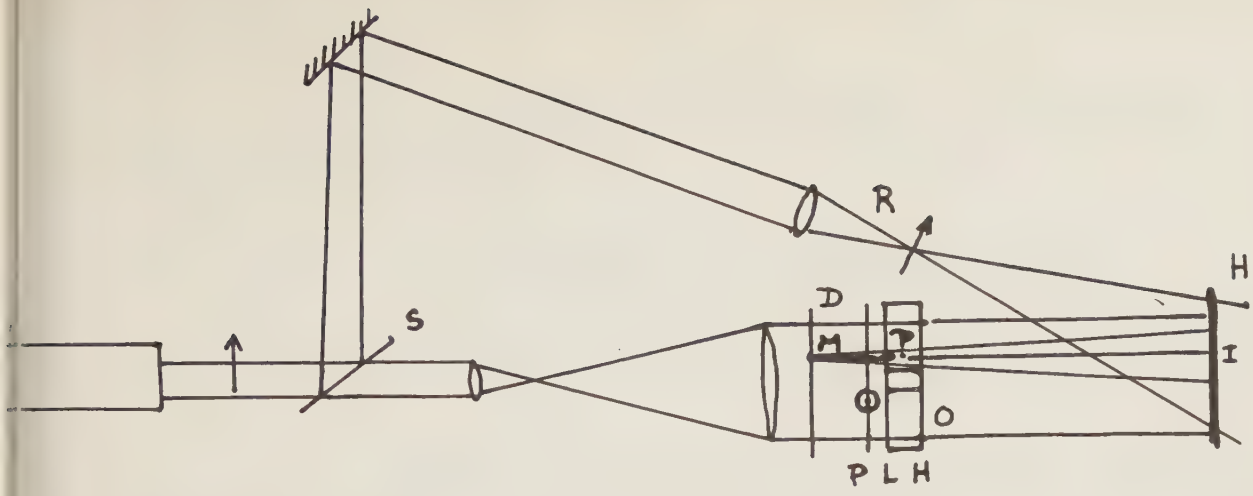


figure 31a

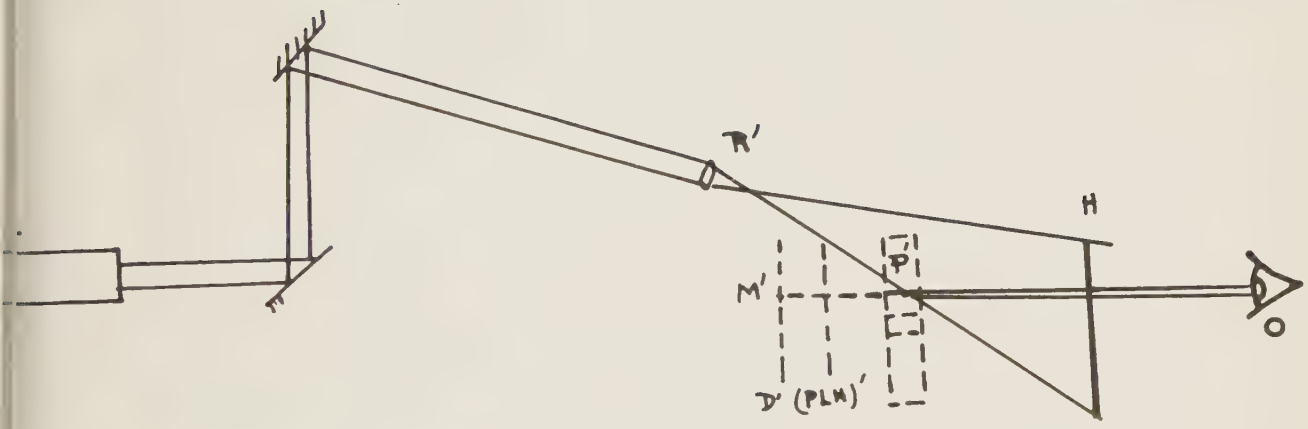


figure 31b

La comparaison des deux plaques précédentes permet de localiser les isoclines.

IV.1.5.2. Méthode par double exposition

IV.1.5.2.1. Isopaches d'objets non photoélastiques

Reprenons le montage de la figure 30a. Si nous supposons que l'objet O n'est pas photoélastique, il ne va transmettre qu'une seule surface d'onde. En procèdant par double exposition, on enregistre la surface d'onde ayant traversé l'objet non contraint puis la surface d'onde ayant traversé l'objet contraint.

Ensuite, la plaque H est développée et restitue simultanément, avec le montage de la figure 30b, les deux surfaces d'ondes enregistrées. Elles sont cohérentes entre elles et interfèrent. Il y a une frange brillante toutes les fois que

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n)\, \delta e = 2k\pi \qquad (77)$$

soit $\delta e = \dfrac{k\lambda}{n_0 - n} = cte$

La formule (15) permet alors d'écrire :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = - \frac{E}{\nu e} \cdot \frac{k\lambda}{n_0 - n} = cte \qquad (78)$$

L'interférogramme obtenu représente donc les isopachiques de l'objet. Elles sont également dans le plan du dépoli.

IV.1.5.2.2. Objets photoélastiques : isopaches et isochromes

Il s'agit encore du montage de la figure 30. Nous allons dans un premier temps enregistrer la surface d'onde de l'objet non contraint, d'épaisseur e et d'indice n_0.

.../

Dans un deuxième temps, on enregistre les surfaces d'ondes de l'objet contraint.

Au point P, l'objet a maintenant une épaisseur $e' = e + \delta e$ et deux indices principaux n_1 et n_2.

A la restitution, l'hologramme va engendrer, en amont du diffuseur D, les trois ondes cohérentes entre elles, et dont les phases relatives sont :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 e \\ \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [n_1(e + \delta e) - n\,\delta e] \\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [n_2(e + \delta e) - n\,\delta e] \end{cases} \qquad (79)$$

L'amplitude restituée par l'hologramme va s'écrire :

$$E = k_1 E_0 e^{i\varphi_0} + \frac{k_2}{2} E_0 e^{i\varphi_1} + \frac{k_2}{2} E_0 e^{i\varphi_2} \qquad (80)$$

Les termes k_1 et k_2 sont des constantes qui dépendent du temps de pause des deux enregistrements et du rapport de l'intensité du faisceau objet à celle du faisceau de référence. On rajoute les termes 1/2 pour que <u>si les temps de pauses sont égaux</u> : $k_1 = k_2$

L'intensité résultante observée à la restitution sera $I = E \times E^*$:

$$I = I_0 \left[k_1^2 + \frac{k_2^2}{2} + k_1 k_2 \left\{\cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\right\} + \frac{k_2^2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \qquad (81)$$

Soit encore :

$$\boxed{I = I_0 \left\{k_1^2 + k_2 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\left[2 k_1 \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2}\right) + k_2 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right]\right\}} \qquad (82)$$

.../

Il n'intervient dans l'équation (82) que deux termes de phase que nous allons calculer :

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n_1 + n_2 - 2n_0)\, e + (n_1 + n_2 - 2n)\, \delta e\right] \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[n_1 - n_2\right]\left[e + \delta e\right] \end{cases} \qquad (83)$$

Les relations (47) et (48) donnent les relations entre les indices et les contraintes. Elles sont évidemment toujours valables.

$$n_1 + n_2 - 2n_0 = -\tfrac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} + \pi_{12})(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad (47)$$

$$n_1 - n_2 = -\tfrac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12})(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\frac{\delta e}{e} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad (48)$$

Pour les matériaux usuels, $\frac{\delta e}{e} \ll 1$, ce qui veut dire que $\delta e \ll e$ (voir paragraphe IV.1.4.1.). Dans les équations (83) les termes en δe sont donc négligeables. Remplaçons les termes restants par leur valeur :

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0 = \frac{2\pi e}{\lambda} A(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{isopaches} \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2) & \text{isochromes} \end{cases}} \qquad (84)$$

avec $\boxed{A = -\tfrac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} + \pi_{12}) \text{ et } B = -\tfrac{1}{2}\, n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12})}$

L'équation (84) est à comparer avec l'équation (50).

.../

La relation (82) devient, en fonction des contraintes :

$$\boxed{I = I_0 \left\{ K_1^{\,2} + K_2 \cos \frac{\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2) \left[2K_1 \cos \frac{\pi e}{\lambda} A(\sigma_1 + \sigma_2) + K_2 \cos \frac{\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \right\}} \qquad (85)$$

Cette relation est à comparer avec l'équation (51)

La relation (85) possède un terme de plus en $(\sigma_1 - \sigma_2)$, que l'équation (51), mais les images obtenues sur un même champ de contraintes sont les mêmes, au profil des franges prés.

Pour obtenir un contraste maximum des franges, il faut que $K_1 = K_2$. De plus, posons $\boxed{I_{Max.} = I_0}$.

Dans ce cas, l'équation (85) devient :

$$\boxed{I = \frac{I_0}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2) \left[2 \cos \frac{\pi e}{\lambda} A(\sigma_1 + \sigma_2) + \cos \frac{\pi e}{\lambda} B(\sigma_1 - \sigma_2) \right] \right\}} \qquad (86)$$

ou encore

$$\boxed{I = \frac{I_0}{4} \left[1 + \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} + \cos^2 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right]} \qquad (86bis)$$

IV.1.5.2.3. Analyse des réseaux obtenus

Posons de nouveau, comme pour le tableau (73) :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} B\, e\, (\sigma_1 - \sigma_2) &= w \\ \frac{\pi}{\lambda} A\, e\, (\sigma_1 + \sigma_2) &= v \end{aligned}} \qquad (87)$$

.../

L'équation (86) s'écrit alors :

$$I = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos w\,(\cos w + 2\cos v)\right] \qquad (88)$$

Etudions les variations du second membre.

- Prenons d'abord le cas où $\cos w = 0$ (isochromes d'ordre $\frac{1}{2}$, 3/2, etc, c'est à dire les mêmes que pour le Mach Zender).

Dans ce cas, $I = \frac{I_0}{4}$ = cte. Ce sont des isochromes grises visibles sur la photo [4]

Regardons maintenant les isopaches :

<u>Isopache $\cos v = 1$</u> $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos w\right]^2$

- sur l'isochrome $\cos w = 1$, $I = I_0$
  " $\cos w = 0$, $I = \frac{I_0}{4}$
  " $\cos w = -1$, $I = 0$

<u>Isopache $\cos v = 0$</u> $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos^2 w\right]$

- sur l'isochrome $\cos w = 1$, $I = \frac{I_0}{2}$
  " $\cos w = 0$, $I = \frac{I_0}{4}$
  " $\cos w = -1$, $I = \frac{I_0}{2}$

<u>Isopache $\cos v = -1$</u> $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{4}\left[1 - \cos w\right]^2$

- sur l'isochrome $\cos w = 1$, $I = 0$
  " $\cos w = 0$, $I = \frac{I_0}{4}$
  " $\cos w = -1$, $I = I_0$

Tous ces résultats sont portés sur la figure 32.

.../

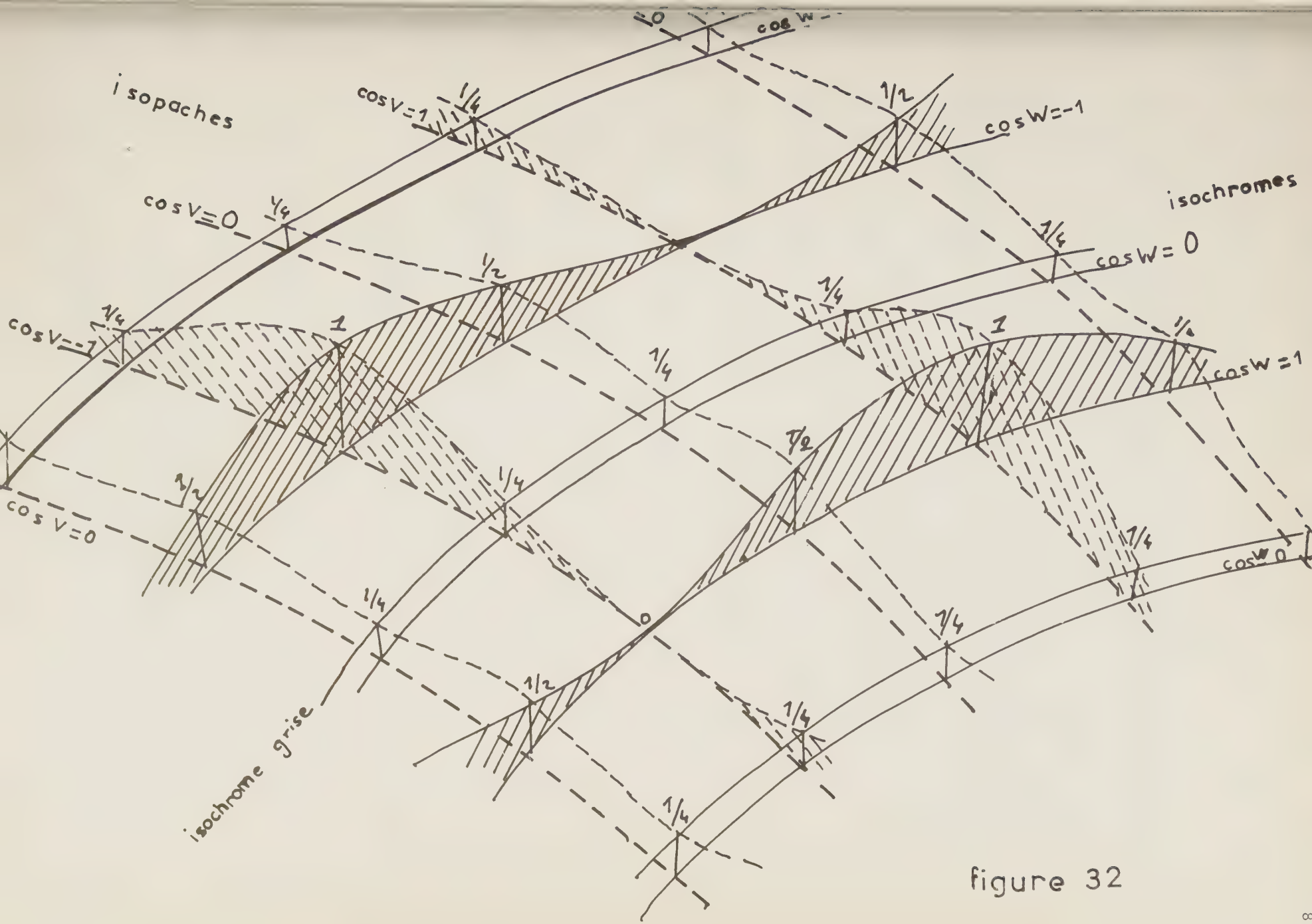

isopaches
isochromes
isochrome grise
cos V=1
cos V=0
cos V=-1
cos V=0
cos W=-1
cos W=0
cos W=1
cos W 0
1/4
1/2
1
0

figure 32

Le champ de franges laisse apparaitre comme précédemment, d'une part en grisé uniforme les isochromes d'ordre $\frac{1}{2}$, 3/2, etc, et d'autre part dans les régions A définies comme au paragraphe IV.1.4.1., les isopachos d'ordre 0, $\pm$ 2, $\pm$ 4, etc et dans les régions B, les isopaches d'ordre $\pm$ 1, $\pm$ 3, etc. Les emplacements de franges sont rigoureusement les mêmes que pour le Mach-Zender, par simple ou double exposition. Seuls, ici encore, les profils des franges auront varié.

Le contraste est maximal pour $k_1 = k_2$. Dans les cas où ces deux valeurs ne sont pas égales, il est tel que :

- Isopache cos v = 1 $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{(k_1+k_2)^2}\left[k_1 + k_2 \cos w\right]^2$

- Isopache cos v = 0 $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{4}\left[k_1^2 + k_2^2 \cos^2 w\right]$

- Isopache cos v = -1 $\Rightarrow$ $I = \frac{I_0}{4}\left[k_1 - k_2 \cos w\right]^2$

Le rapport ρ des intensités minimales et maximales est :

$$\rho = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2} \quad \text{soit}$$

$$\rho = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \qquad (89)$$

ρ s'annule pour $k_1 = k_2$

IV.1.5.3. Nouvelles méthodes holographiques

IV.1.5.3.1. Lasers non polarisés, lumière dirigée

L'inconvénient des méthodes holographiques précédentes est que la restitution exige un laser et que la prise photographique du

.../

lieu de franges est assez difficile. Nous allons voir que les montages en lumière dirigée, proposés maintenant permettent de restituer en lumière blanche.

Pour s'affranchir également des ennuis dûs à l'utilisation de lames biréfringentes, les méthodes suivantes utilisent un laser non polarisé, ce qui permet d'éliminer ces lames.

Un laser non polarisé est un laser démuni de fenêtres de BREWSTER. Il va donc émettre successivement des trains d'ondes de polarisation différente, mais de même longueur de cohérence, avec une probabilité d'existance égale pour tout état de polarisation.

Prenons un laser de 30 cm de longueur de cohérence. Il va émettre un nouveau train d'onde toutes les nanosecondes. Pour une pose de 1 seconde, il passe 10^9 trains d'ondes, ce qui donne une bonne moyenne statistique.

La lumière émise par ce laser est donc décomposable en deux composantes linéaires orthogonales, de même amplitude, dont les phases sont indépendantes entre elles. Et ceci, quelque soit la direction des axes.

Une lumière polarisée circulairement peut également se décomposer en deux lumières linéaires orthogonales, mais il y a une relation de phase fixe entre les deux composantes, qui est la quadrature.

Sur la figure 33, le faisceau éclairant l'objet, dont la carte des formes est circulaire dans le plan P_0, devient une carte de formes quelconques après la traversée de l'objet O, dans le plan P_1.

Mettre un polariseur linéaire sur le faisceau objet ou sur le faisceau de référence, consiste à projeter toutes ces formes sur une direction donnée.

.../

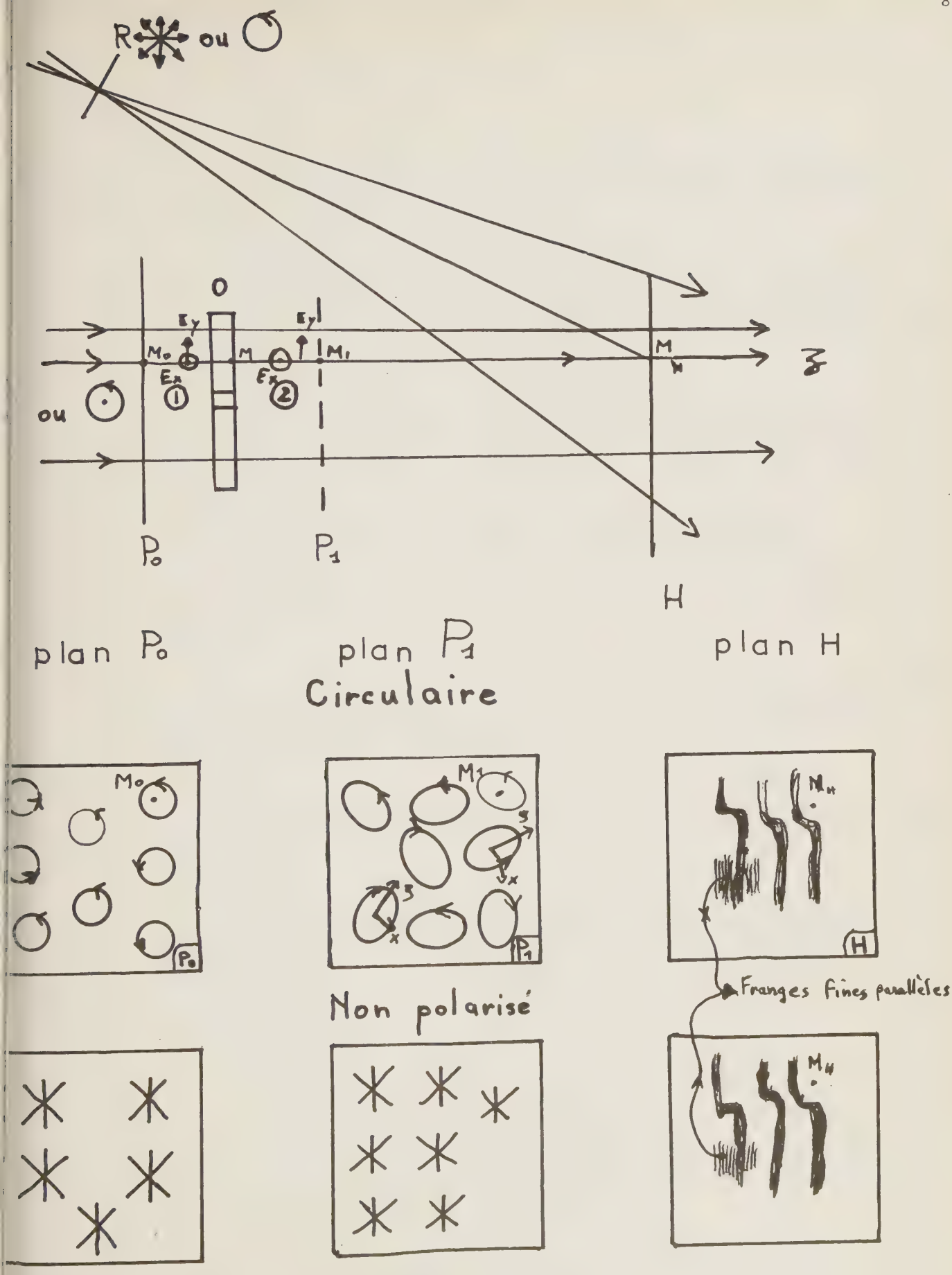

R
ou
O
Ey
Ey
M0
M
M1
Ex
Ex
1
2
ou
M
H
z
P0
P1
H
plan P0
plan P1
plan H
Circulaire
M0
P0
M1
P1
H
Non polarisé
Franges fines parallèles
MH
MH

Figure 33

Si on éclaire en lumière non polarisée, dans le plan P_1, la lumière reste non polarisée.

La figure 33 montre que si l'objet est traversé par un faisceau de lumière parallèle, il y a une correspondance linéaire entre un point M_H de l'hologramme et un point M de l'objet.

Négligeons les termes de diffraction dûs au fait que l'objet O n'est pas une pupille infinie. Tout se passe alors comme si l'objet était dans le plan de l'hologramme.

IV.1.5.3.2. Isochromes par simple exposition

Reprenons la figure 33. L'objet et la référence sont éclairés avec le même faisceau laser non polarisé.

Dans la région (1), la lumière incidente est décomposée en deux lumières orthogonales parallèlement aux axes du biréfringent au point M.(soient χ et ξ, ces axes).

La même décomposition est faite sur le rayon homologue RM_H (Région (3)).

Après traversée de l'objet O, dans la région (2), une des composantes a pris un retard de phase par rapport à l'autre qui est de :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) (e + \delta e) \qquad (90)$$

Dans le plan H de l'hologramme il va y avoir interférence d'une part entre E_χ et $E_{\chi R}$, d'autre part entre E_ξ et $E_{\xi R}$. Ces deux systèmes d'interférences sont indépendants puisque les lumières composantes sont incohérentes entre elles.

L'émulsion photographique placée dans le plan H enregistre donc au point M_H et quelles que soient les directions des axes du

.../

biréfringent au point M, l'intensité.

$$I = \left| E_{\chi} + E_{\chi R} \right|^2 + \left| E_{\xi} + E_{\xi R} \right|^2 \qquad (91)$$

Appelons $E_0 = K_1 e^{i\theta}$ l'amplitude complexe de l'onde de référence au point M_H.

En l'absence de modèle O, l'onde objet aurait pour amplitude en ce point : $K_2 e^{i\alpha}$

L'objet placé et mis sous tension, les ondes E_{χ} et E_{ξ} prennent la forme:

$$E_{\chi} = \frac{K_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + \varphi_1)} \quad \text{avec } \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (e + \delta e)(n_1 - n)$$

$$E_{\xi} = \frac{K_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + \varphi_2)} \quad \text{avec } \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (e + \delta e)(n_2 - n) \qquad (92)$$

L'intensité au point M_H vaut donc :

$$I = \left| \frac{K_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{K_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + \varphi_1)} \right|^2 + \left| \frac{K_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{K_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + \varphi_2)} \right|^2 \qquad (93)$$

soit en développant :

$$I = K_1^2 + K_2^2 + K_1 K_2 \cos(\theta - \alpha - \varphi_1) + K_1 K_2 \cos(\theta - \alpha - \varphi_2) \qquad (94)$$

$$I = K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\theta - \alpha - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \qquad (95)$$

.../

B

A

Photo 5

Le contraste des franges sera maximal pour $K_1 = K_2$, que l'on prend égaux à 1 :

$$\boxed{I = 1 + \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\cos\left(\theta - \alpha - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \qquad (96)$$

L'équation (96) montre que l'on enregistre sur l'hologramme des <u>franges de moiré</u> qui sont les isochromatiques de l'objet.

Ceci a été vérifié en regardant les plaques au microscope (voir photo 5) :

Dans les règions A où $\varphi_1 = \varphi_2 + (2K + 1)\pi$, il n'y a pas de franges d'interférence mais une teinte uniforme, ce qui est évident sur l'équation (96). Dans les règions B où $\varphi_1 = \varphi_2 + 2K\pi$, il y a, au contraire, un maximum de modulation ($\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 1$).

Les règions A sont celles où les deux réseaux indépendants précédant sont en opposition de phase spatiale, et les règions B sont celles où ils sont en phase spatialement.

Mais ces franges ne vont pas apparaitre directement quand la plaque est éclairée en lumière blanche. En effet, il apparait ici un phénomène nouveau de <u>diffraction</u> que nous allons expliquer.

IV.1.5.3.2.1. <u>Restitution classique avec laser</u>

En utilisant le montage de la figure (34) on obtient sur le diffuseur l'image de l'objet O dans le plan duquel se situent les isochromes. En effet, l'expression (93) fournit la transmission en amplitude de la plaque (H) éclairée par une onde cohérente :

$$T = K_1^2 + K_2^2 + \frac{K_1K_2}{2}\left[e^{i(\theta-\alpha-\varphi_1)} + e^{-i(\theta-\alpha-\varphi_1)}\right] + \frac{K_1K_2}{2}\left[e^{i(\theta-\alpha-\varphi_2)} + e^{-i(\theta-\alpha-\varphi_2)}\right] \qquad (97)$$

Si l'onde de restitution est identique à l'onde de référence $e^{i\theta}$, l'amplitude transmise s'écrit $E = T\, e^{i\theta}$, soit :

$$E = e^{i\theta}\left[k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right] + \frac{k_1 k_2}{2}\, e^{2i\theta}\left[e^{-i(\alpha+\varphi_1)} + e^{-i(\alpha+\varphi_2)}\right] + \frac{k_1 k_2}{2}\left[e^{i(\alpha+\varphi_1)} + e^{i(\alpha+\varphi_2)}\right] \tag{98}$$

Le troisième terme de l'expression (98) représente l'image reconstituée de l'objet. Son intensité s'écrit :

$$I = \frac{k_1^{\,2} k_2^{\,2}}{4}\left| e^{i(\alpha+\varphi_1)} + e^{i(\alpha+\varphi_2)} \right|^2$$

soit :

$$\boxed{I_2 = k_1^{\,2} k_2^{\,2} \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} \tag{99}$$

Ce qui représente bien les isochromes à cause des équations (84)

Un observateur regardant l'objet O à travers l'hologramme H, (figure 35) ne verra qu'un point lumineux à l'infini dont l'intensité varie quand l'oeil se déplace devant la plaque H, selon la loi de la relation (99).

Rien ne sera changé s'il regarde la plaque H au lieu de l'objet O.

La règion M_H de l'hologramme agit en effet comme un réseau de diffraction et le seul rayon lumineux issu de la source R et qui entre dans l'oeil est le rayon RM_H.

.../

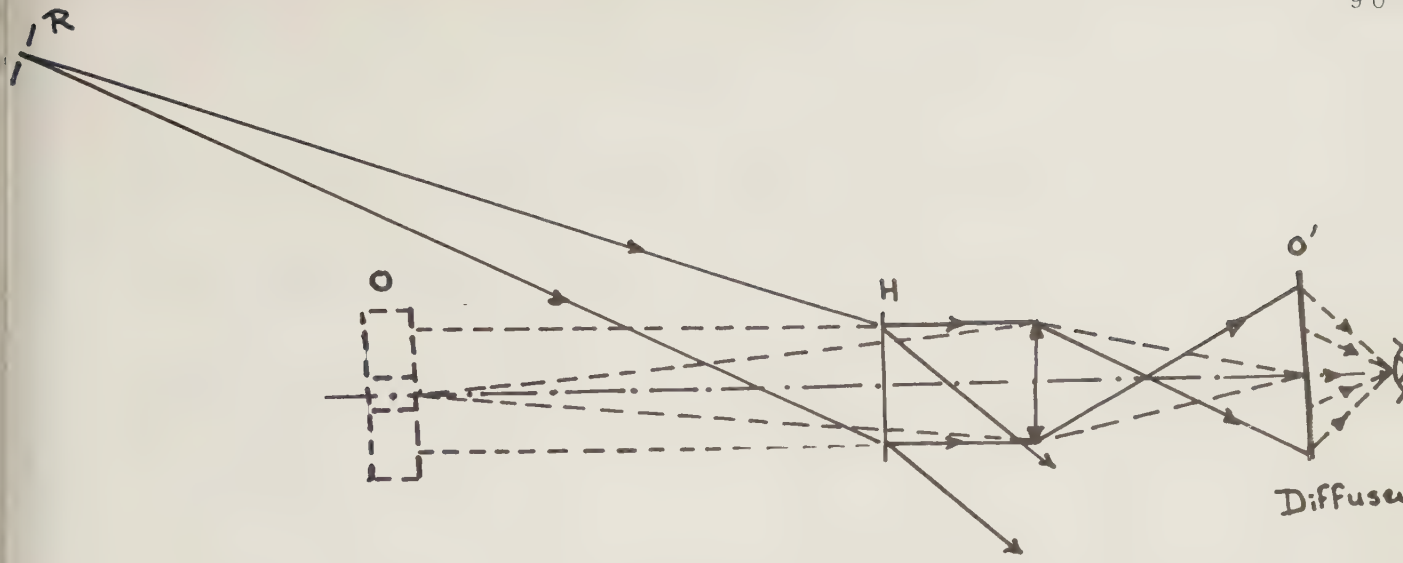


figure 34

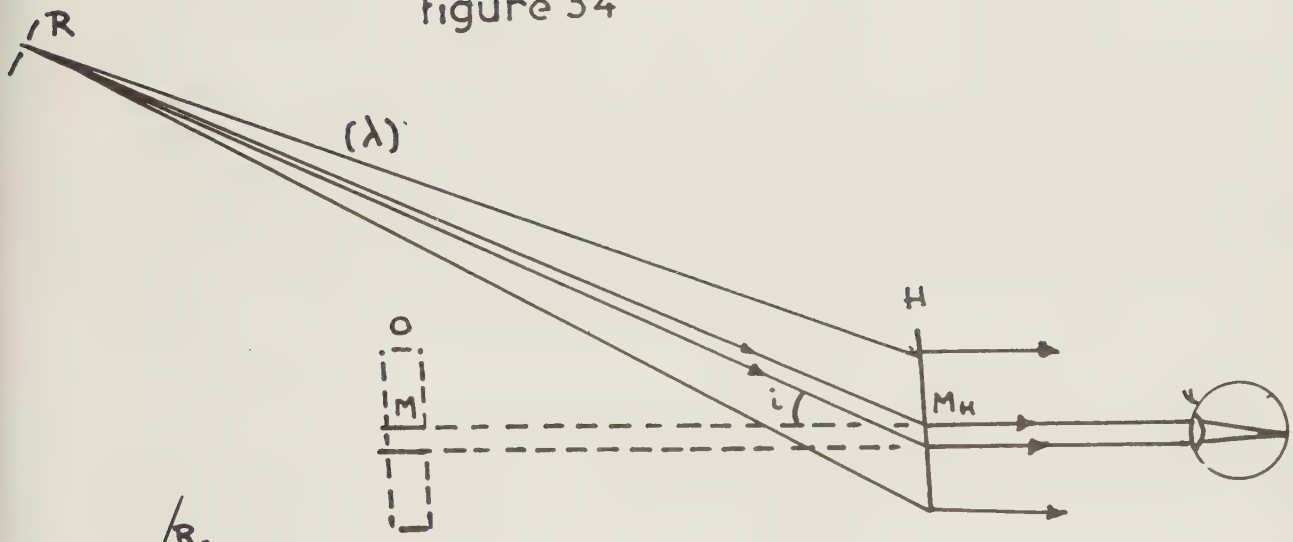


figure 35

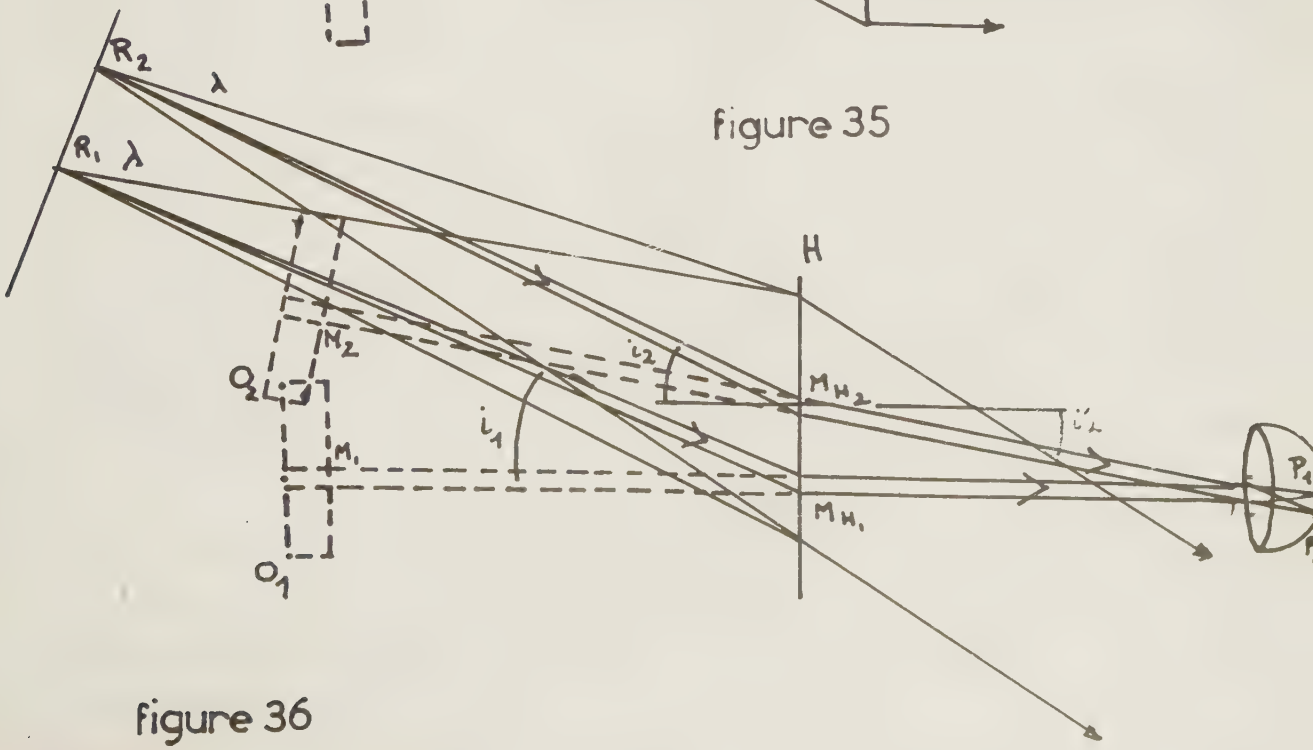


figure 36

La relation des réseaux est appliquable dans ce cas et :

$$\sin i + \sin i' = k \, {}^{\lambda}/_{p} \qquad (100)$$

λ étant la longueur d'onde du laser et p le pas des franges au point M_H, que l'on peut lier à $(\theta - \alpha)$. $k = 1$ (cas où le réseau fonctionne dans le premier ordre.)

Si l'angle i de restitution est le même qu'à l'enregistrement, alors l'angle i' est nul. Mais si on tourne la plaque H, l'angle i' suit la loi (100).

Plaçons un deuxième faisceau de référence R_2 de même longueur d'onde que R et incliné d'un angle i_2 différent de i (voir figure 36). L'observation va alors voir les deux régions MH_1 et MH_2 de l'hologramme H éclairées. L'objet restitué se dédouble et les deux faisceaux R_1MH_1 et R_2MH_2 restituent deux points différents de l'objet dédoublé.

Les intensités en P_1 et P_2 au fond de l'oeil correspondent aux intensités des deux points de l'objet séparés de la distance MH_1 MH_2. Elles suivent donc la loi (99).

Plaçons un diffuseur dans le plan R_1R_2; la source de restitution devient une <u>source large</u>.

Dans ce cas, tout l'intervalle MH_1 MH_2 va envoyer des rayons dans l'oeil de l'observateur. Les objets restitués sont complètement brouillés et disparaissent, mais l'oeil verra sur la plaque H les isochromes se dessiner.

En résumé, les points de la plaque H que l'oeil verra noirs sont ceux pour lesquels il n'y a pas de diffraction dans la direction de l'oeil, c'est à dire les points où il n'y a pas eu de réseau enregistré. Ils satisfont à la relation $\varphi_1 = \varphi_2 + (2k+1)\pi$ (règion A de la photo 5).

.../

Photo 6

IV.1.5.3.2.2. Restitution en lumière blanche

Devant le diffuseur R_1R_2 de la figure 36, plaçons maintenant une source blanche.

Tout va se passer exactement comme quand on regarde un réseau de diffraction : on va voir s'étaler les couleurs du spectre de la lumière de la lampe, sauf là où il n'y a pas de réseau, c'est à dire dans les règions A où $\varphi_1 = \varphi_2 + (2k+1)\pi$. Ces isochromes vont donc apparaitre en noir car aucune longueur d'onde ne sera diffractée par ces points.

Un point R_1 éclaire l'hologramme H avec toutes les longueurs d'ondes visibles. Pour un point M_H quelconque, il existe toujours une longueur d'onde qui rentrera dans l'oeil. Il y a donc une correspondance couleur-point M_H quand on agrandit le champ R_1R_2, les couleurs se dólavent progressivement.

Voir photo 6 l'aspect du champ observé pour une plaque trouée en traction.

L'efficacité du réseau dépendant de la profondeur de modulation enregistrée, on restitue un profil d'isochromes qui dépend de la répartition spectrale de la lampe source.

Les franges sont évidemment localisées sur l'hologramme.

IV.1.5.3.3. Double exposition : isochromes et isopaches

Reprenons le montage de la figure 33 et procédons par double exposition, la première se faisant avec l'objet non contraint donc isotrope et la deuxième avec l'objet mis sous tensions. L'hologramme va enregistrer trois surfaces d'ondes indépendantes.

.../

En appelant φ_0 la phase de l'objet non contraint, l'intensité enregistrée par l'hologramme sera :

$$I = \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha+\varphi_1)} \right|^2 + \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha+\varphi_2)} \right|^2 + \left| k_1 e^{i\theta} + k_2 e^{i(\alpha+\varphi_0)} \right|^2 \tag{101}$$

Ceci, en supposant les deux temps de pauses égaux.

$$I = 2(k_1^2 + k_2^2) + k_1 k_2 \left[\cos(\theta-\alpha-\varphi_1) + \cos(\theta-\alpha-\varphi_2) + 2\cos(\theta-\alpha-\varphi_0)\right] \tag{102}$$

avec $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 e$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left[n_1(e + \delta e) - n\,\delta e\right] \tag{103}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left[n_2(e + \delta e) - n\,\delta e\right]$$

Rappelons que n_0 est l'indice du matériau non contraint, n_1 et n_2 les indices principaux du matériau sous tensions et n l'indice de l'air.

On voit que le groupe (103) est identique au groupe (79). Les équations (84) sont donc encore valables ici, c'est à dire que $(\varphi_1 - \varphi_2)$ représente les isochromes et $(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0)$, les isopaches.

On voit que l'intensité I de la relation (102) varie entre les deux bornes suivantes :

$$I_{Max.} = 2\,(k_1 + k_2)^2$$

$$I_{Min.} = 2\,(k_1 - k_2)^2$$

Le contraste sera maximum pour $k_1 = k_2$, que nous prendrons égaux à 1 :

$$I = 4 + \cos(\theta-\alpha-\varphi_1) + \cos(\theta-\alpha-\varphi_2) + 2\cos(\theta-\alpha-\varphi_0) \tag{104}$$

.../

$$\boxed{I = 4 + 2\left[\cos\left(\theta-\alpha-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)+\cos\left(\theta-\alpha-\varphi_0\right)\right]} \qquad (105)$$

L'équation (105) montre que l'on enregistre sur l'hologramme des franges de Moire-diffraction, comme au paragraphe précédent.

- Sur les isochromes telles que $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, l'intensité enregistrée vaut :

$$I = 4 + 2\cos\left(\theta-\alpha-\varphi_0\right) \qquad (106)$$

Après développement de la plaque, ce réseau de densité va diffracter dans l'ordre 1 une intensité constante, car la profondeur de modulation est constante et vaut 1/3. Ce sont les isochromes grisès.

- Sur les isochromes telles que $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = 2k\pi$, l'intensité enregistrée vaut :

$$I = 4\left[1 + \cos\left(\theta-\alpha-\frac{\varphi_1+\varphi_2+2\varphi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)\right] \qquad (107)$$

Le réseau de diffraction enregistré va être totalement modulé par les isopaches.

- Sur les isochromes telles que $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \pi + 2k\pi$, l'intensité enregistrée devient :

$$I = 4\left[1 + \sin\left(\theta-\alpha-\frac{\varphi_1+\varphi_2+2\varphi_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)\right] \qquad (108)$$

Le réseau de diffraction enregistré va être également totalement modulé par les isopaches, mais en opposition de phase spatiale par rapport au cas précédent.

.../

- Sur les <u>isopaches</u> telles que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi$, l'équation (105) devient :

$$I = 4 + 2\left[\cos(\theta-\alpha-\varphi_0) \pm \sin(\theta-\alpha-\varphi_0)\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right] \qquad (109)$$

posons $\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \operatorname{tg}\psi$ (110)

avec $\psi = -\frac{\pi}{4}$ pour $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \pi + 2K\pi$

$\psi = 0$ pour $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi$

$\psi = +\frac{\pi}{4}$ pour $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = 2K\pi$

Dans ce cas, l'équation (109) devient :

$$I = 4 + \frac{\sin(\theta-\alpha-\varphi_0 \pm \psi)}{\cos\psi} \qquad (111)$$

Sur l'isochrome $-\frac{\pi}{2}$, on retrouve que I varie de 2 à 6

Sur l'isochrome 0, I varie de 1,172 à 6,828

Sur l'isochrome $+\frac{\pi}{2}$, on retrouve que I varie de 2 à 6

Sur l'isochrome π, I varie de 1,172 à 6,828

- Sur les <u>isopaches</u> telles que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = 2K\pi$, l'équation (105) devient :

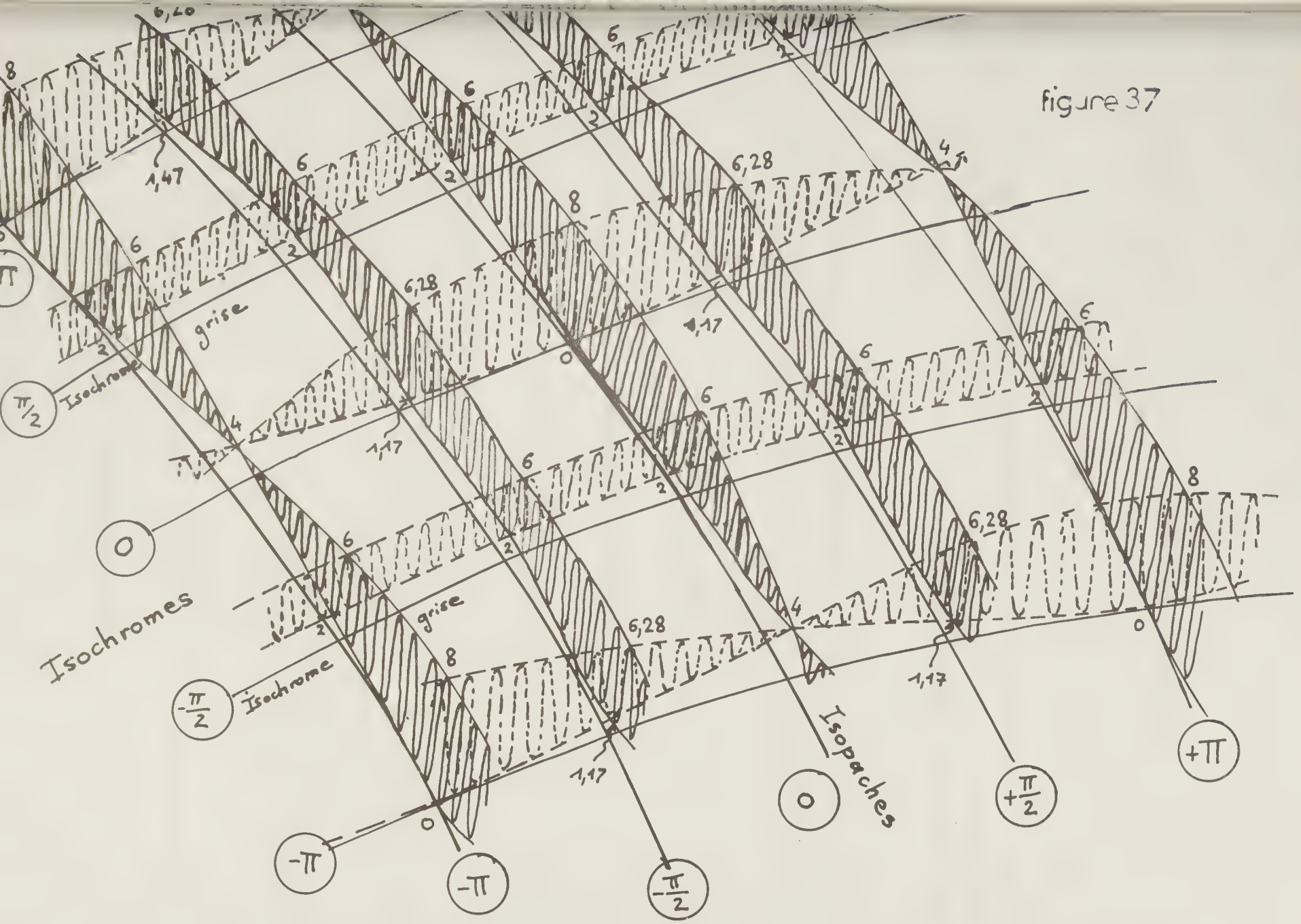
$$I = 4 + 2\cos(\theta-\alpha-\varphi_0)\left[1 + \cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right] \qquad (112)$$

L'isopache est modulée par l'isochrome

- Enfin, sur les <u>isopaches</u> telles que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = \pi + 2K\pi$

$$I = 4 + 2\cos(\theta-\alpha-\varphi_0)\left[1 - \cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right] \qquad (113)$$

.../



Isochromes
Isochrome grise
Isopaches
π
$\pi/2$
0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$+\frac{\pi}{2}$
$+\pi$
1,47
1,17
6,28

figure 37

L'isopache ainsi définie a une modulation en opposition de phase spatiale avec la précédente.

Tous ces résultats sont résumés sur la figure (37)

- En restitution en lumière blanche, la lumière diffractée va reproduire fidèlement les modulations précédentes, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas de la simple exposition (paragraphe IV.1.5.3.2.2.)

- En restitution en lumière cohérente, en faisant l'hypothèse que l'onde de restitution est analogue à l'onde de référence, la relation (102) donne alors l'amplitude de l'image reconstituée :

$$E = \frac{E_0}{2}\left[e^{-i(\theta-\alpha-\varphi_1)} + e^{-i(\theta-\alpha-\varphi_2)} + 2\, e^{-i(\theta-\alpha-\varphi_0)}\right] e^{i\theta} \qquad (114)$$

D'où l'intensité de l'image ainsi restituée. $I = EE^*$

$$I = \frac{I_0}{4}\left[6 + 4\cos(\varphi_1 - \varphi_0) + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_0) + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \qquad (115)$$

Ce qui s'écrit encore, en posant $I_{Max.} = I_0$:

$$\boxed{I = \frac{I_0}{4}\left[1 + 2\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} + \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right]} \qquad (116)$$

L'équation (116) est identique à l'équation (86bis). Elle montre que l'image restituée est modulée par les isochromes et les isopaches de la manière suivante :

- Sur les isochromes telles que $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi$, l'intensité vaut :

$I = \frac{I_0}{4}$: ce sont les isochromes grises

.../

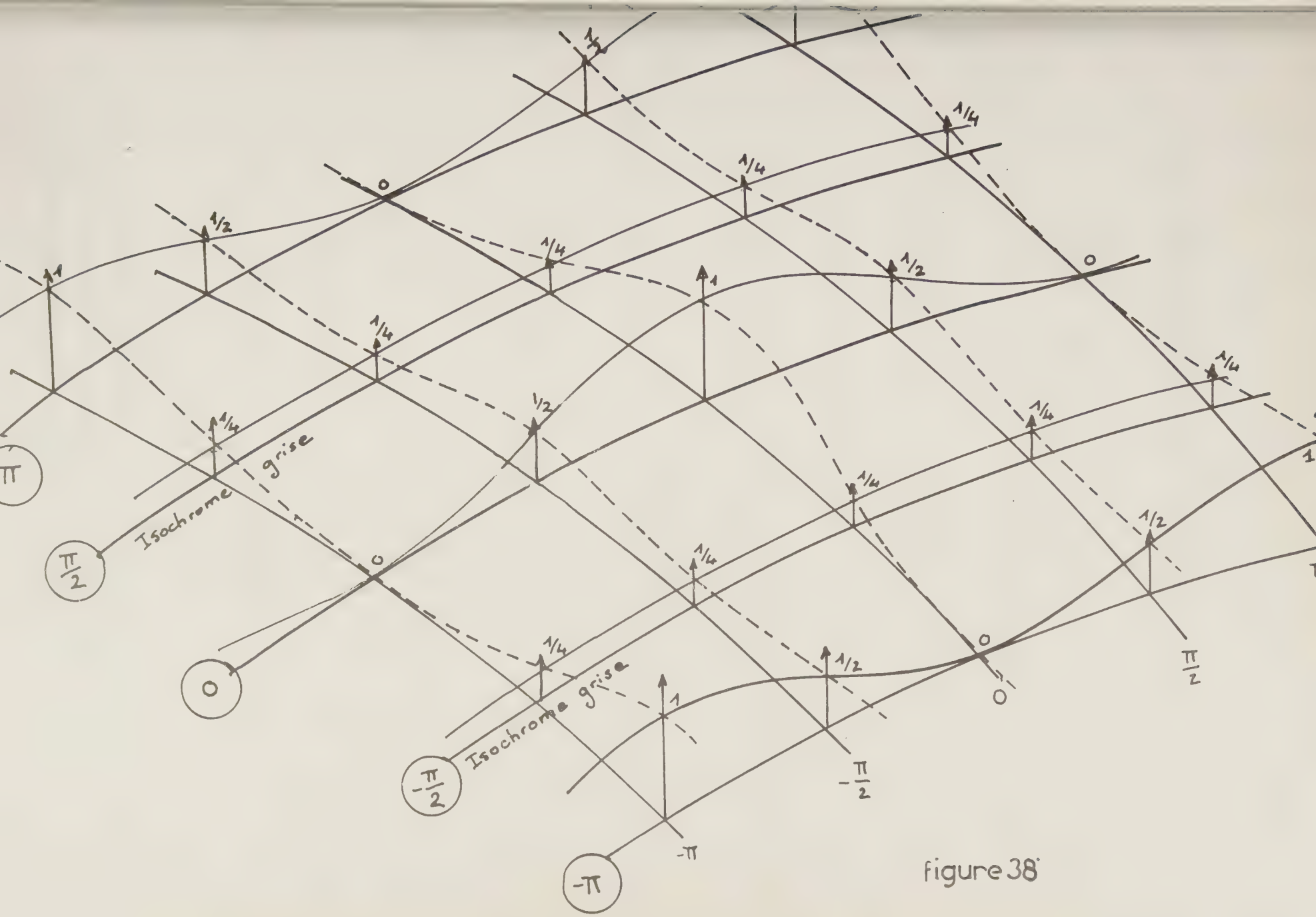


figure 38

- Sur les <u>isochromes</u> telles que $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 2k\pi$, l'intensité vaut :

$$I = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2}\right] \qquad (117)$$

Le long de cette isochrome, on retrouve les <u>isopaches</u> totalement modulées.

- Sur les <u>isochromes</u> telles que $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \pi + 2k\pi$, l'intensité vaut :

$$I = \frac{I_0}{2}\left[1 - \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2}\right] \qquad (118)$$

On obtient également une modulation des <u>isopaches</u>, mais en opposition de phase spatiale par rapport au cas précédent.

- Sur les <u>isopaches</u> telles que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, l'équation (116) devient :

$$I = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right] \qquad (119)$$

L'isopache est modulée par l'isochrome

- Sur <u>l'isopache</u> telle que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = +2k\pi$,

$$I = \frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right]^2 \qquad (120)$$

- Enfin, sur <u>l'isopache</u> telle que $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{2} = \pi + 2k\pi$,

$$I = \frac{I_0}{4}\left[1 - \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right]^2 \qquad (121)$$

Les deux dernières modulations sont en opposition de phase spatiale. Tous ces résultats sont résumés sur la figure (38) qui est identique à la figure 32, mais en se repérant par rapport aux phases.

.../

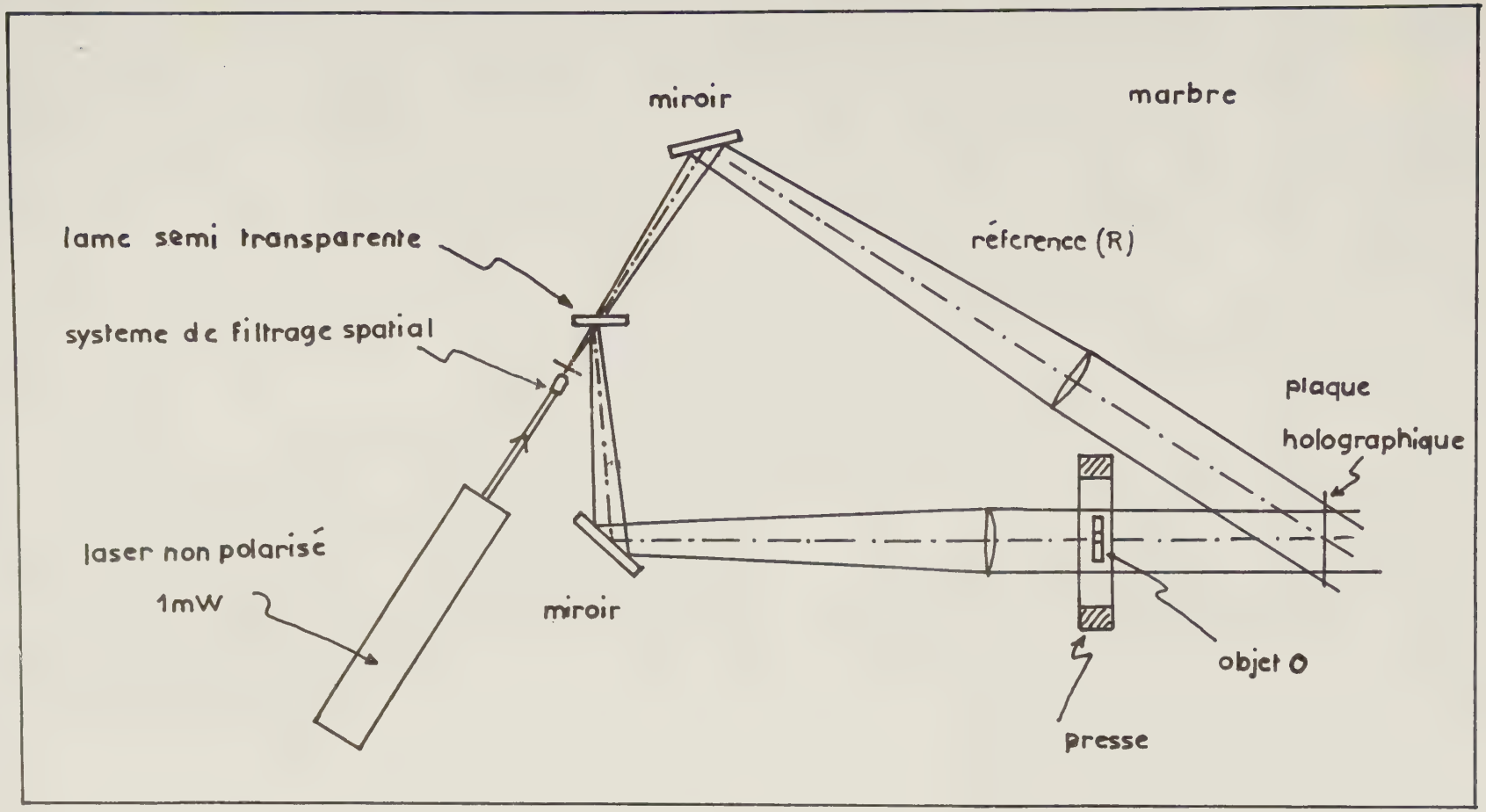

ECHELLE 1/10
miroir
marbre
lame semi transparente
réference (R)
systeme de filtrage spatial
plaque
holographique
laser non polarisé
1mW
miroir
objet O
presse

figure 39

Photo 7

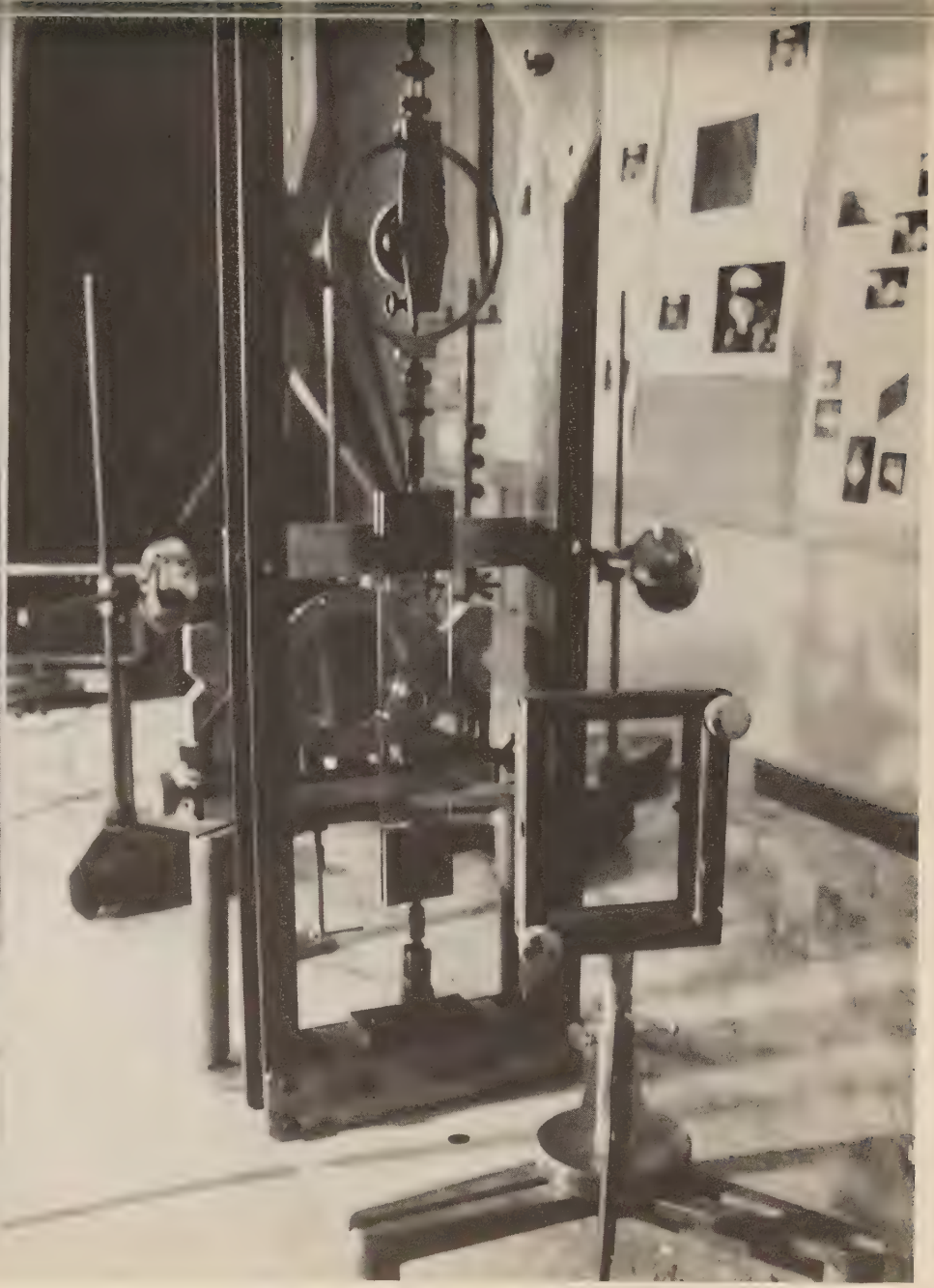


Photo 8

Montage utilisé

Le montage de laboratoire réalisé est reproduit à l'échelle 1/10 sur la figure 39. Les divers éléments sont posés sur une dalle de marbre. Le temps de pause pour des plaques Kodak 649F sont de l'ordre de 10 secondes pour un laser d'une puissance de 1 mw.

L'objet utilisé est une plaque en araldite trouée en son centre et mise en traction.

La photographie n° [7] représente l'ensemble du montage et la photographie n° [8] détaille la partie presse.

Voir photo [9] l'aspect du champ de franges pour la double exposition, dans le cas de la plaque trouée en traction.

Les tirages en noir et blanc des divers systèmes de franges permettent de repérer avec une bonne précision spatiale les franges isochromes ou isopaches.

Mais il y a deux zones pour lesquelles le pointé est difficile : la zones où les isopaches et les isochromes sont parallèles, et les bords de l'objet.

- Les défauts aux bords de l'objet sont imputables d'une part à l'araldite qui a des effets de bord photoélastiques importants, d'autre part à la diffraction. Nous éliminons le premier inconvénient en utilisant du buton et le deuxième en introduisant une lentille de conjugaison qui élimine les effets de la diffraction. Cette lentille forme l'image de l'objet dans le plan de l'hologramme et elle apparait dans les montages suivants.

- Pour éliminer également les défauts dus au parallélisme des isopaches et des isochromes, il a paru nécessaire de séparer les deux systèmes de franges de manière à faire apparaitre sur l'hologramme, au choix, les isochromes, les isopaches ou les deux en même temps.

..../

Photo 9

Cette séparation n'a d'intérêt que si l'objet utilisé est le même pour les deux systèmes de franges. En effet, les recalages des systèmes dans le cas de deux maquettes sont difficiles et l'on n'est jamais sûr que les deux modèles sont identiques.

Il a donc fallu trouver un moyen optique permettant de faire la séparation.

IV.1.5.3.4. Séparation des systèmes de franges : isopaches

On a vu au paragraphe IV.1.5.3.2. que l'on savait enregistrer et restituer en lumière blanche les isochromes seules. Il reste à trouver le moyen d'enregistrer les isopaches seules dans des conditions équivalentes.

La méthode est basée sur le principe suivant : (voir figure 40).

Un objet O biréfringent est défini au point M par les indices principaux n_1 et n_2 et par l'épaisseur $e + \delta e$. Envoyons sur ce point O un faisceau de lumière non polarisée, décomposable en deux vibrations indépendantes et orthogonales E_1 et E_2. Après la traversée de l'objet O, la composante E_1 est en avance sur la composante E_2 de l'angle $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) (e + \delta e)$.

Introduisons sur le faisceau lumineux un pouvoir rotatoire d'angle 90°. Les composantes E_1 et E_2 vont alors interchanger leurs axes. Plaçons ensuite sur le faisceau un biréfringent O' identique au biréfringent O. Après l'avoir traversé, la composante E_2 aura rattrapé son retard sur la composante E_1.

L'ensemble [Objet O - pouvoir rotatoire - Objet O'] est donc équivalent à un objet isotrope, d'épaisseur $(e + \delta e)$ et d'indice $(n_1 + n_2)$.

.../

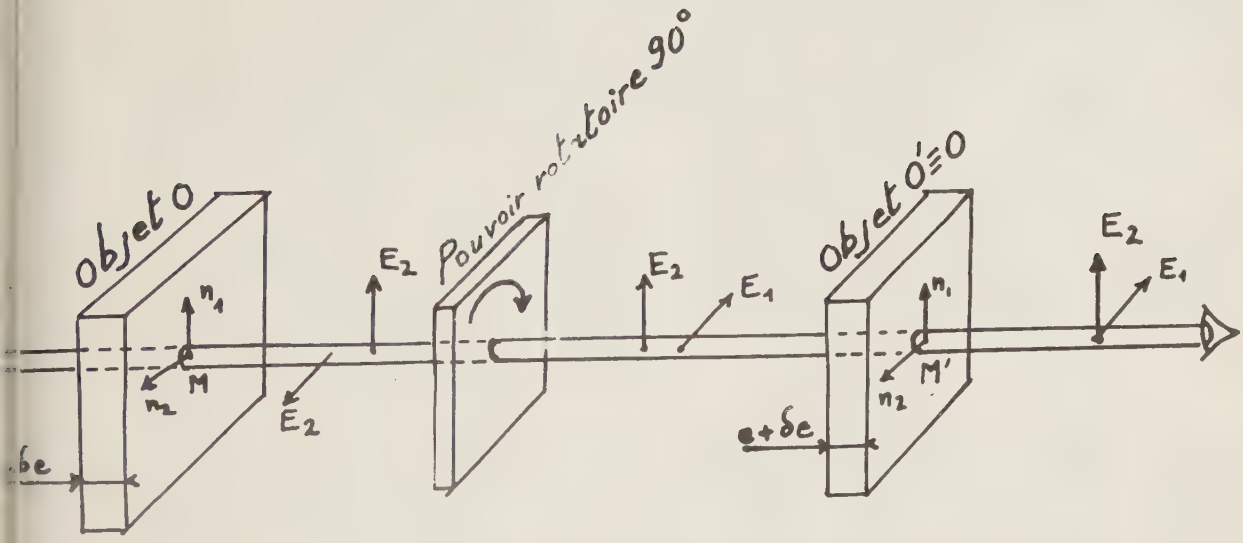


figure 40

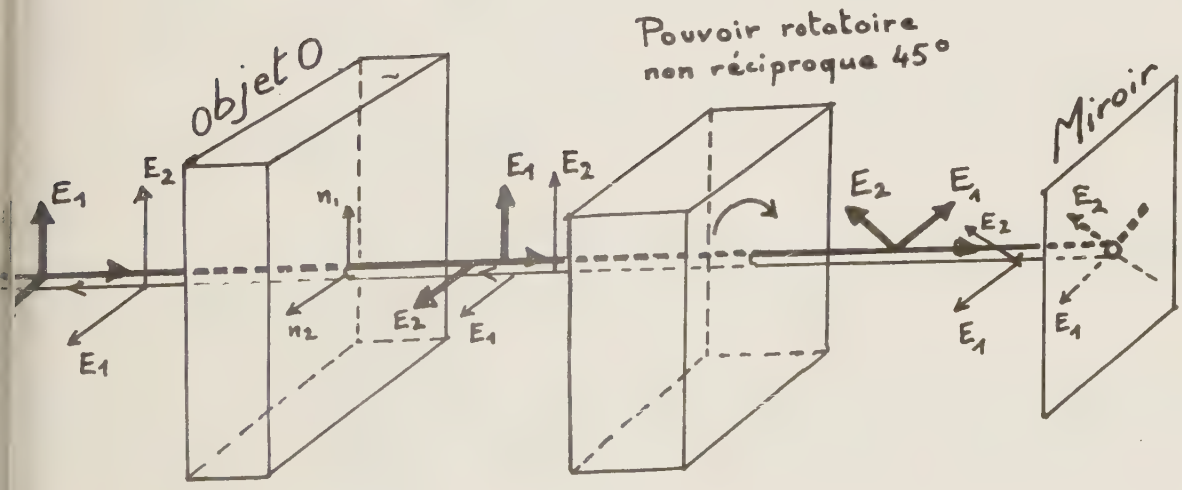


figure 41

Plions le système précédent de manière à traverser deux fois le même objet O. Le système de la figure 41 sera équivalent au système de la figure 40 si le pouvoir rotatoire utilisé est non réciproque, c'est à dire si on utilise un effet Faraday.

L'introduction du miroir n'introduit alors qu'un déphasage de π d'une composante par rapport à l'autre, ce qui fait passer d'un réseau de franges à fond noir à un réseau de franges à fond blanc et réciproquement.

Si l'on couple le montage de la figure 41 avec le montage de la figure 39, on élimine alors l'effet introduit par la biréfringence de l'objet O. Tout ce passe comme si cet objet n'était pas photoélastique. Les isochromes disparaissent et l'on n'enregistre que les isopaches seules.

Le montage définitif utilisé est celui de la figure 42, reproduit ici à l'échelle $1/10^e$.

Le choix des éléments de ce montage sera expliqué dans le prochain paragraphe.

Appelons $\Re$ l'angle de rotation introduit par le pouvoir rotatoire de Faraday (voir figure 43).

Décomposons l'onde incidente, non polarisée, en quatre ondes E_1, E_{1R}, E_2, E_{2R}, selon les axes du biréfringent au point M de l'objet O.

Pour $\Re = 90°$, E_1 prend la place de E_2 et réciproquement au retour. Au point M_H, on enregistrerait des interférences entre E_{1R} et E_2 d'une part, E_{2R} et E_1 d'autre part. Or, dans le cas de la lumière non polarisée, il n'y a pas de relation de phase entre E_1 et E_2 ou entre E_{1R} et E_{2R}. Les franges vont donc se brouiller à cause de la fluctuation de phase spatiale à l'origine. On doit donc ajouter après

.../

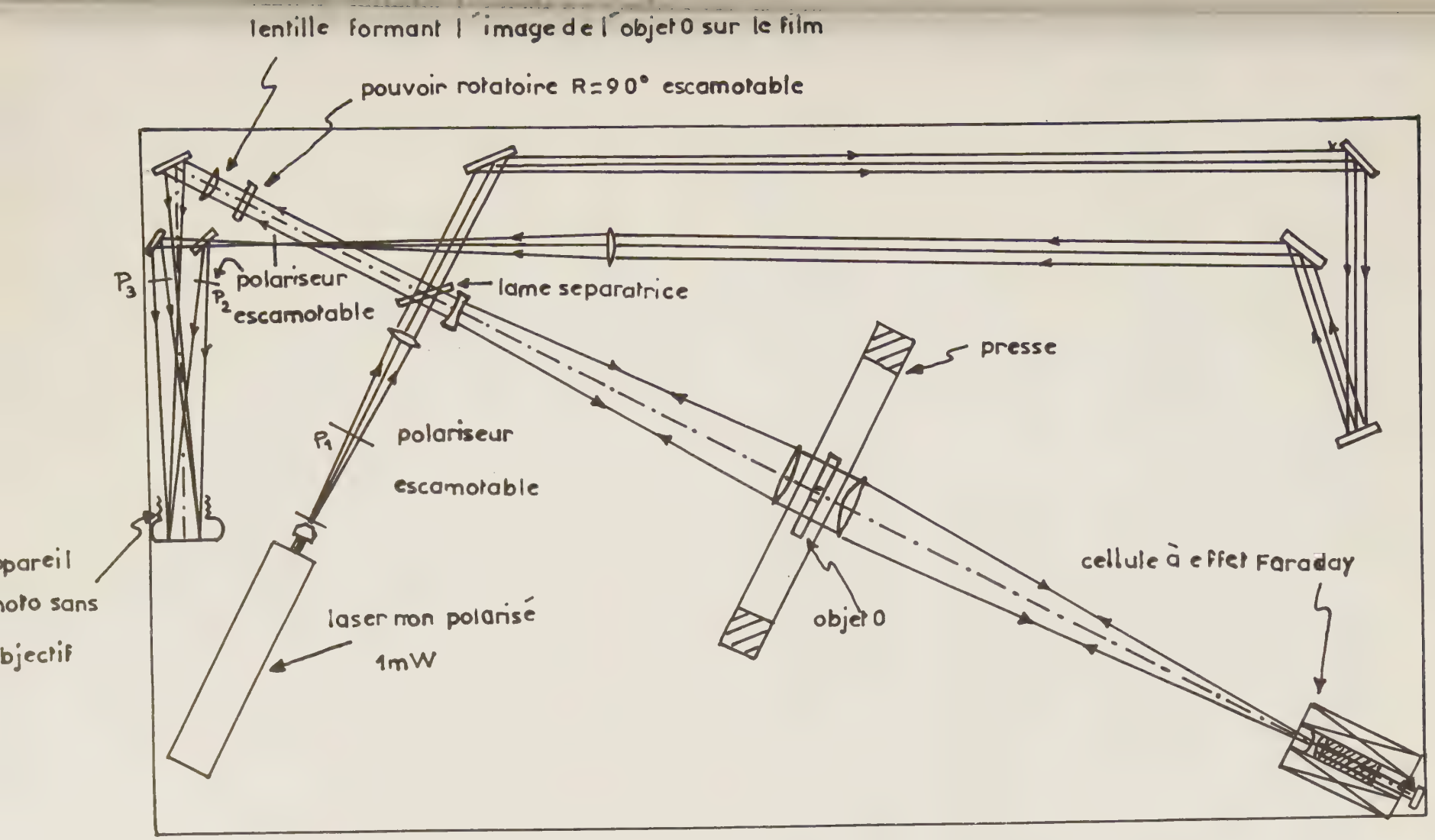

lentille formant l'image de l'objet O sur le film
pouvoir rotatoire R=90° escamotable
P3
polariseur
P2
escamotable
lame separatrice
presse
P1
polariseur
escamotable
pareil
oto sans
bjectif
laser non polarisé
1mW
objet O
cellule à effet Faraday

figure 42

la deuxième traversée de l'objet O, un deuxième pouvoir rotatoire $\Re' = 90°$ pour que ce soient E_{1R} et E_1 d'une part, E_{2R} et E_2 d'autre part qui interfèrent.

Ce pouvoir rotatoire $\Re'$ n'est pas nécessaire dans le cas de la lumière incidente polarisée circulairement, car dans ce cas, E_1 et E_2 sont en quadrature à l'origine avec E_{2R} et E_{1R}, donc liés en phase.

IV.1.5.3.4.1. Double exposition avec pouvoir rotatoire (Objet chargé et non chargé)

Faisons une double exposition, les pouvoirs rotatoires étant en place et l'objet étant au repos, puis chargé. Soit $E_0 = k_1 e^{i\theta}$ l'amplitude complexe de l'onde de référence en M_H, φ_0, φ_1 et φ_2 les déphasages définis par la relation (103) et α la phase de l'onde sans l'objet O.

Nous allons calculer l'intensité en M_H (voir figure 44).

$$I = I_A + I_B + I_C$$

avec :
$$I_A = \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left[\cos \Re \, e^{i\varphi_1} + \sin \Re \, e^{i\varphi_2} \right] e^{i(\alpha + \varphi_1)} \right|^2 \qquad (122)$$

$$I_B = \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left[\sin \Re \, e^{i\varphi_1} + \cos \Re \, e^{i\varphi_2} \right] e^{i(\alpha + \varphi_2)} \right|^2$$

$$I_C = \left| k_1 e^{i\theta} + k_2 e^{i\varphi_0} e^{i(\alpha + \varphi_0)} \right|^2$$

.../

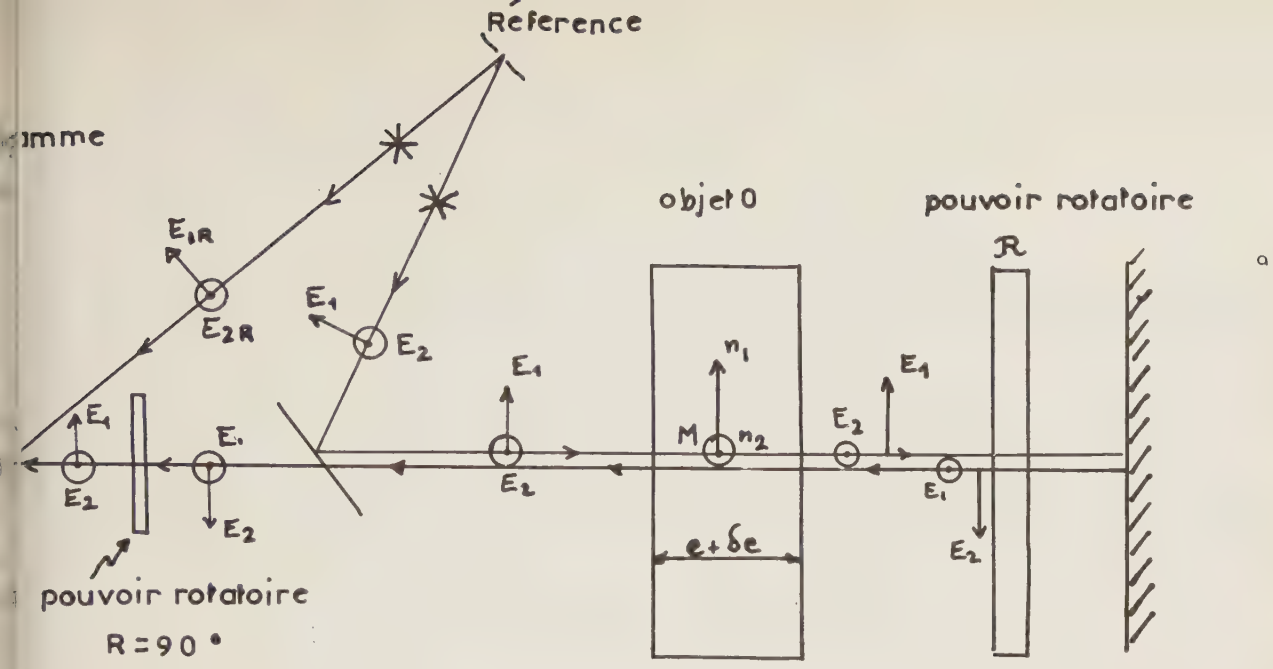


figure 43

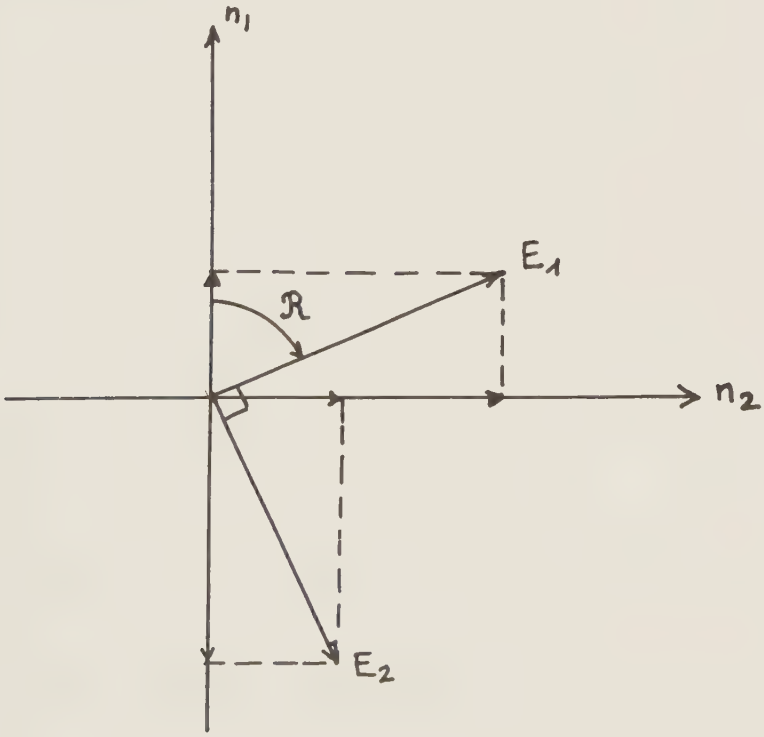


figure 44

$$I_A = \frac{K_1^2}{2} + \frac{K_2^2}{2} + K_1K_2\cos\Re\cos(\theta-\alpha-2\varphi_1) + K_1K_2\sin\Re\cos[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)] +$$
$$+ K_2^2\sin\Re\cos\Re\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$I_B = \frac{K_1^2}{2} + \frac{K_2^2}{2} + K_1K_2\cos\Re\cos(\theta-\alpha-2\varphi_2) + K_1K_2\sin\Re\cos[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)] +$$
$$+ K_2^2\sin\Re\cos\Re\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$I_C = K_1^2 + K_2^2 + 2\,K_1\,K_2\cos(\theta-\alpha-2\varphi_0)$$

D'où la valeur de I en divisant tout par deux :

$$\boxed{\begin{aligned} I = {} & K_1^2 + K_2^2 + K_1K_2\cos\Re\cos[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)]\cos(\varphi_1-\varphi_2) + K_1K_2\sin\Re\cos[\theta-\alpha-(\varphi_1+ \\ & + K_2^2\sin\Re\cos\Re\cos(\varphi_1-\varphi_2) + K_1K_2\cos(\theta-\alpha-2\varphi_0) \end{aligned} \qquad (123)}$$

Posons $K_1 = K_2 = 1$ (c'est à dire intensité référence = intensité objet).
L'équation (123) devient :

$$\boxed{\begin{aligned} I = {} & 2+\cos[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)]\left\{\cos\Re\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin\Re\right\}+\cos(\theta-\alpha-2\varphi_0) + \\ & 2\sin\Re\cos\Re\cos(\varphi_1-\varphi_2) \end{aligned} \qquad (124)}$$

- On voit tout d'abord que <u>si $\Re = 0$</u> (pas de pouvoir rotatoire), l'équation (124) redonne l'équation (105) avec un objet d'épaisseur double, ce qui est évident.

.../

Dans le cas où $\Re = 90°$, l'équation (124) devient :

$I_{90} = 2 + \cos\left[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)\right] + \cos\left[\theta-\alpha-2\varphi_0\right]$, soit, en divisant par deux :

$$\boxed{I_{90} = 1+ \cos\left[\theta-\alpha-\frac{\varphi_1-\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)} \qquad (125)$$

Cette équation est à comparer avec l'équation (96). Celle-ci donnait uniquement les isochromes. Ici nous allons donc obtenir uniquement les isopaches.

Un calcul analogue à celui du paragraphe IV.1.5.3.2.1. va donner pour intensité de l'image restituée avec un laser :

$$\boxed{I_L = k_1^2\, k_2^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)} \qquad (126)$$

Ce qui représente bien les isopaches.

Le raisonnement fait ensuite au paragraphe IV.1.5.3.2.2. est encore valable ici et l'on va restituer les isopaches seules en lumière blanche à l'aide des moirés-diffraction.

Cas où $\Re$ est voisin de 90°

Si la détermination de la valeur du pouvoir rotatoire $\Re$ est entachée d'une petite erreur, l'équation (125) n'est plus valable. Posons $\Re = \frac{\pi}{2} - r$, l'équation (124) devient, en développant au premier ordre en r :

$$I=2+r\cos\left[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)\right]\cos(\varphi_1-\varphi_2)+2\cos\left(\theta-\alpha-\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right) + 2\,r\cos(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (127)$$

.../

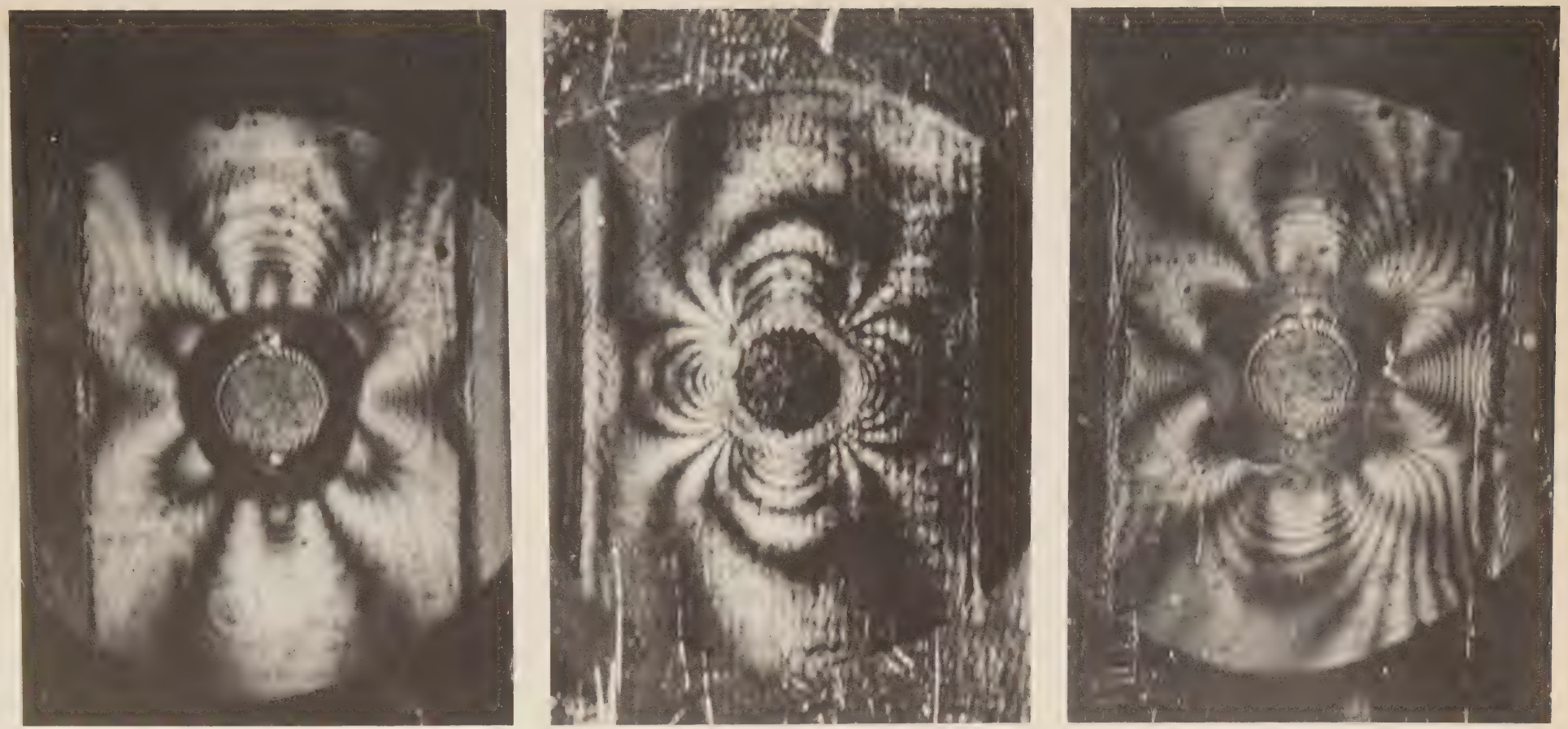


Photo 10

Soit :

$$I=2\left[1+\cos\left(\theta-\alpha-\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_0}{2}\right)\right]+r\cos(\varphi_1-\varphi_2)\left[2+\cos\left[\theta-\alpha-(\varphi_1+\varphi_2)\right]\right] \quad (128)$$

Le premier terme entre crochets de la relation (128) montre que l'on conserve les isopaches inchangées. Le deuxième terme exprime l'apparition des isochromes avec un contraste faible puique r est petit devant 2.

On voit de plus que si r change de signe, le deuxième terme change de signe, ce qui veut dire que pour deux valeurs de $\Re$ symètriques de $\frac{\pi}{2}$ et voisins de cette valeur, les isopaches sont inchangées et les isochromes sont en opposition de phase spatiale.

Ceci est constaté sur la photo [10] :

- La superposition d'une double pause avec $\Re < 90°$ et d'une double pause avec $\Re > 90°$ élimine également les isochromes.

- Le terme $k_2^2 \sin \Re \cos \Re \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ qui apparait dans l'équation (123) représente une modulation non diffractante qui apparait sur la plaque; on inscrit ainsi sur celle-ci des isochromes qui sont toujours visibles. Le contraste de ces franges est maximum pour $\Re = 45°$, et elles restent seules visibles dans le cas ou $k_2 \gg k_1$.

IV.1.5.3.4.2. Double exposition avec objet chargé, avec et sans pouvoir rotatoire.

Nous allons maintenant faire une double exposition, l'objet étant changé. La première pause se faisant sans les pouvoirs rotatoires et la deuxième se faisant avec.

.../

Calculons l'intensité en M_H avec les mêmes données qu'au paragraphe précédent :

$$I = I_A + I_B + I_C + I_D$$

avec I_A et I_B identique à ceux de l'équation (122)

$$I_C = \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + 2\varphi_1)} \right|^2$$

$$I_D = \left| \frac{k_1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} e^{i(\alpha + 2\varphi_2)} \right|^2$$

Ce qui donne, en divisant l'ensemble par deux :

$$I = k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 \cos[\theta - \alpha - (\varphi_1 + \varphi_2)][(1 + \cos \Omega)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \Omega] + \\ + k_2^2 \sin \Omega \cos \Omega \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (129)$$

En posant $k_1 = k_2 = 1$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$, on obtient, en divisant encore par deux :

$$I = 1 + 2 \cos [\theta - \alpha - (\varphi_1 + \varphi_2)] \cos^2 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \qquad (130)$$

L'équation (130) est à comparer avec l'équation (96).

On obtient encore une fois les isochromes seules, mais avec un profil plus pointu, ce qui permet d'améliorer les mesures.

.../

IV.1.5.3.5. Triple exposition : isochromes et isopaches séparées.

Nous venons de voir au paragraphe IV.1.5.3.4.1. qu'avec un pouvoir rotatoire et une double exposition, on pouvait enregistrer les isopaches seules. Nous avons vu également au paragraphe IV.1.5.3.4.2 qu'avec et sans pouvoir rotatoire, et avec une double exposition, on pouvait enregistrer les isochromes seules.

Nous allons combiner les deux méthodes précédentes pour faire apparaitre sur la même plaque à notre gré, soit les isochromes, soit les isopaches, soit les deux à la fois. De plus, cela doit être visible en lumière blanche.

Nous allons utiliser le montage de la figure 42 au complet, c'est à dire avec deux faisceaux de référence R_1 et R_2 placés à 90° par rapport à l'hologramme, conformément à la figure 45.

Le faisceau R_1 formera avec le faisceau objet les isochromes.

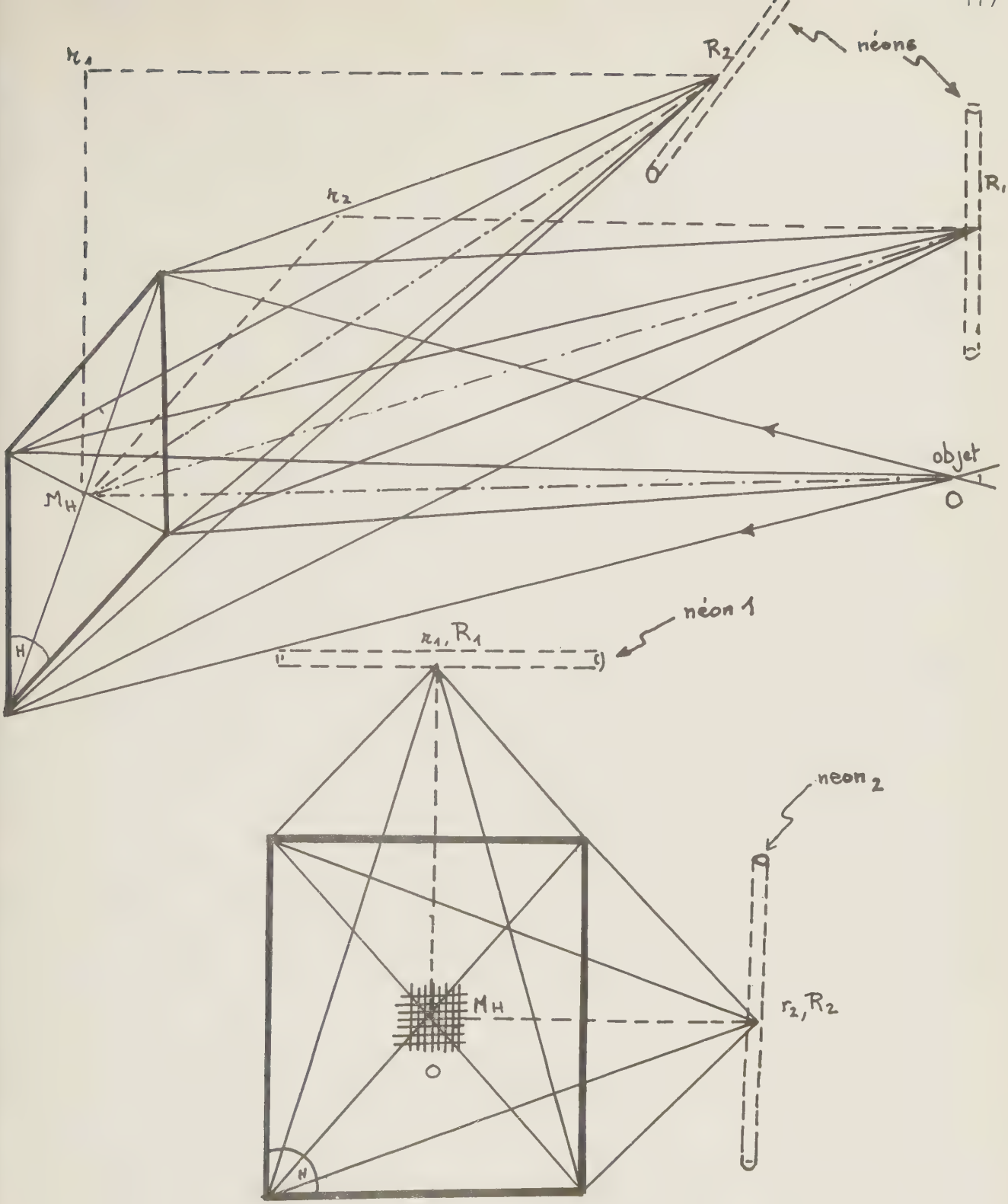
Le faisceau R_2 formera avec le faisceau objet les isopaches.

Ces deux réseaux de diffraction vont se croiser à angle droit sur l'hologramme, ce qui fait qu'ils ne peuvent former de franges de moiré, et ils ne peuvent interférer à la restitution.

En effet, si on restitue avec R_1, seules les isochromes vont apparaitre et si on restitue avec R_2, ce sera le tour des isopaches, car dans la direction de diffraction de R_2, R_1 ne peut envoyer aucune lumière, et réciproquement.

Si on restitue avec deux sources R_1 et R_2, on obtiendra les deux systèmes à la fois.

.../



vue de face

figure 45

La procédure est donc la suivante :

(Pouvoir rotatoire Ω = 90°
première pause) Objet non chargé
(Référence R_2 allumée

(Pouvoir rotatoire Ω = 90°
deuxième pause) Objet chargé
(Référence R_2 allumée

(Pouvoir rotatoire Ω = 0
troisième pause) Objet chargé
(Référence R_1 allumée

On peut également doubler la deuxième pause en allumant R_1 après R_2, ce qui permet d'affiner les isochromes.

Par ce procédé la plaque enregistre les deux systèmes de franges, ce qui permet de bien étalonner l'un par rapport à l'autre. Ces deux systèmes sont visibles en lumière blanche si les sources de restitution sont linéaires (tubes fluorescents) et placées comme le montre les pointillés de la figure 45.

IV.1.5.4. Montage réalisé et résultats

Le montage est semblable à celui de la figure 42. Sur un marbre on a disposé, un laser, un cadre de mise en charge, la cellule de Faraday et les optiques nécessaires à l'enregistrement photographique de l'hologramme (voir photo 11).

Un commentaire plus détaillé de ce montage et des résultats obtenus avec lui sera présenté dans la thèse de Monsieur CHATELAIN du laboratoire d'Optique de BESANÇON.

.../

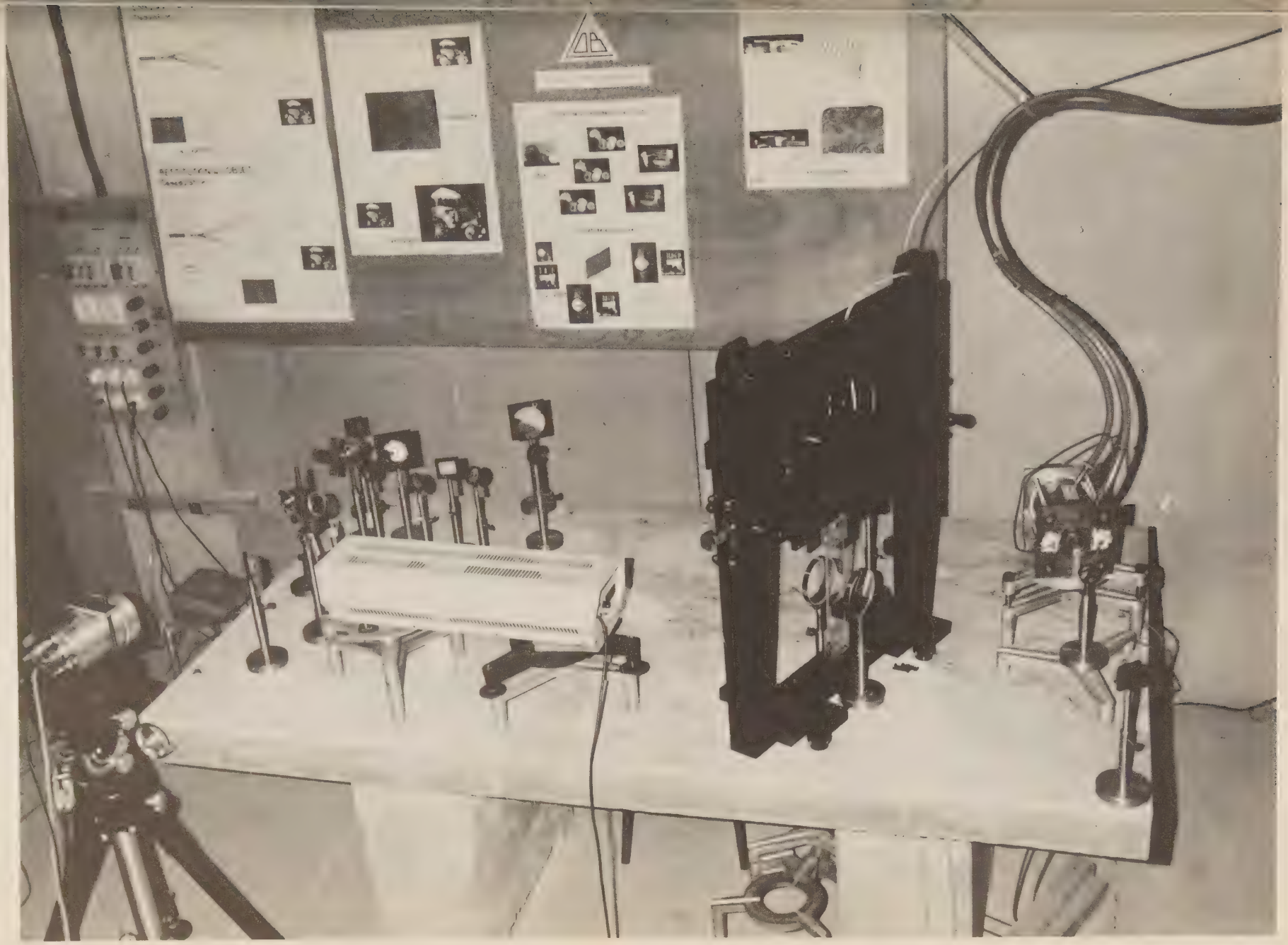


Photo 11

IV.1.6. Méthode polarimétrique

La méthode polarimétrique diffère de la méthode utilisant des franges en ce sens qu'elle ne montre pas une vue d'ensemble du phénomène. En effet, cette méthode est ponctuelle. Par contre sa précision est de deux ordres de grandeur supérieure à la méthode par franges.

Enfin, elle permet de mesurer deux paramètres : la différence des contraintes principales et leur direction dans l'espace.

Elle est basée sur la mesure automatique des variations de formes de lumière, liée à la biréfringence des matériaux optiques (voir le paragraphe II.4.)

IV.1.6.1. Mesure automatique des formes de lumière

Une ellipse de lumière, représentée par un point de la sphère de Poincaré, est caractérisée par son applatissement $\tau = \frac{b}{a}$, l'orientation α du demi-grand axe a et son sens de parcours. (voir figure 48).

L'énergie lumineuse I transmise par un analyseur d'axe OA faisant un angle β avec OX, a pour expression, au facteur de transmission près et en posant : (voir paragraphe II.4.2.)

$$\tau = \frac{b}{a} = \left| \operatorname{tg} \lambda \right| \qquad (134)$$

$$I = \frac{a^2 + b^2}{2} \left[\left[1 + \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \cos 2(\beta - \alpha) \right] \right] \quad \text{soit} \qquad (135)$$

$$I = \frac{a^2 + b^2}{2} \left[1 + \cos 2\lambda \cos 2(\beta - \alpha) \right] \qquad (136)$$

Si l'on fait tourner l'analyseur a vitesse constante de pulsation Ω, le flux lumineux se décompose en une partie continue et une partie alternative de valeurs :

.../

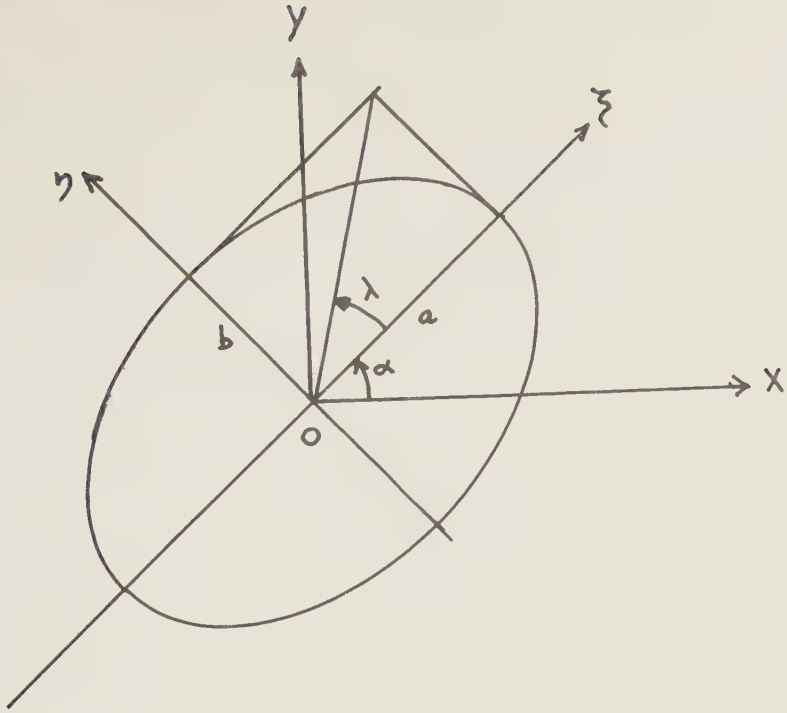


figure 48

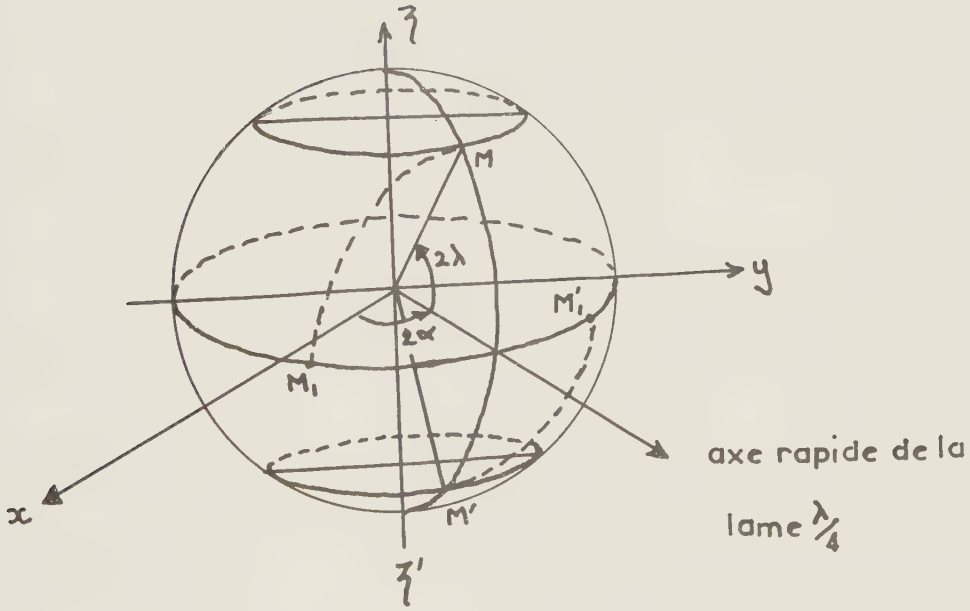


figure 49

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} \\ I_2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} \cdot \dfrac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \cos 2(\Omega t - \alpha) \end{cases} \qquad (137)$$

Faisons tomber le flux lumineux sur un photomultiplicateur. A la sortie de ce dernier on recueille un courant modulé, les informations intéressantes se trouvant sur la fréquence zéro et sur la fréquence double de la rotation de l'analyseur.

A la sortie du photomultiplicateur le courant modulé est transformé en tension grâce à une impédance de charge. On recueille ainsi deux tensions V_1 et V_2 proportionnelles à I_1 et I_2.

Le rapport $\frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} = \cos 2\lambda$ de l'amplitude de la tension alternative à la tension continue caractérise l'aplatissement de l'ellipse et la phase 2α du signal alternatif par rapport à un signal de référence $\cos 2\Omega$ lié au double de rotation de l'analyseur caractérise la position du demi-grand axe.

Ainsi, sur la sphère de Poincaré (figure 49), la vibration est représentée par le point M ou M' suivant qu'elle est droite ou gauche, d'après les conventions adoptées.

Pour lever l'ambiguité quand on le désire, il suffit de placer entre la forme de lumière à étudier et l'analyseur tournant une lame quart d'onde dont l'axe rapide est confondu avec le grand axe de l'ellipse qui est déjà déterminé. La phase du signal alternatif permet alors de savoir si la vibration était en M ou en M' (diminution ou augmentation de la valeur lue).

.../

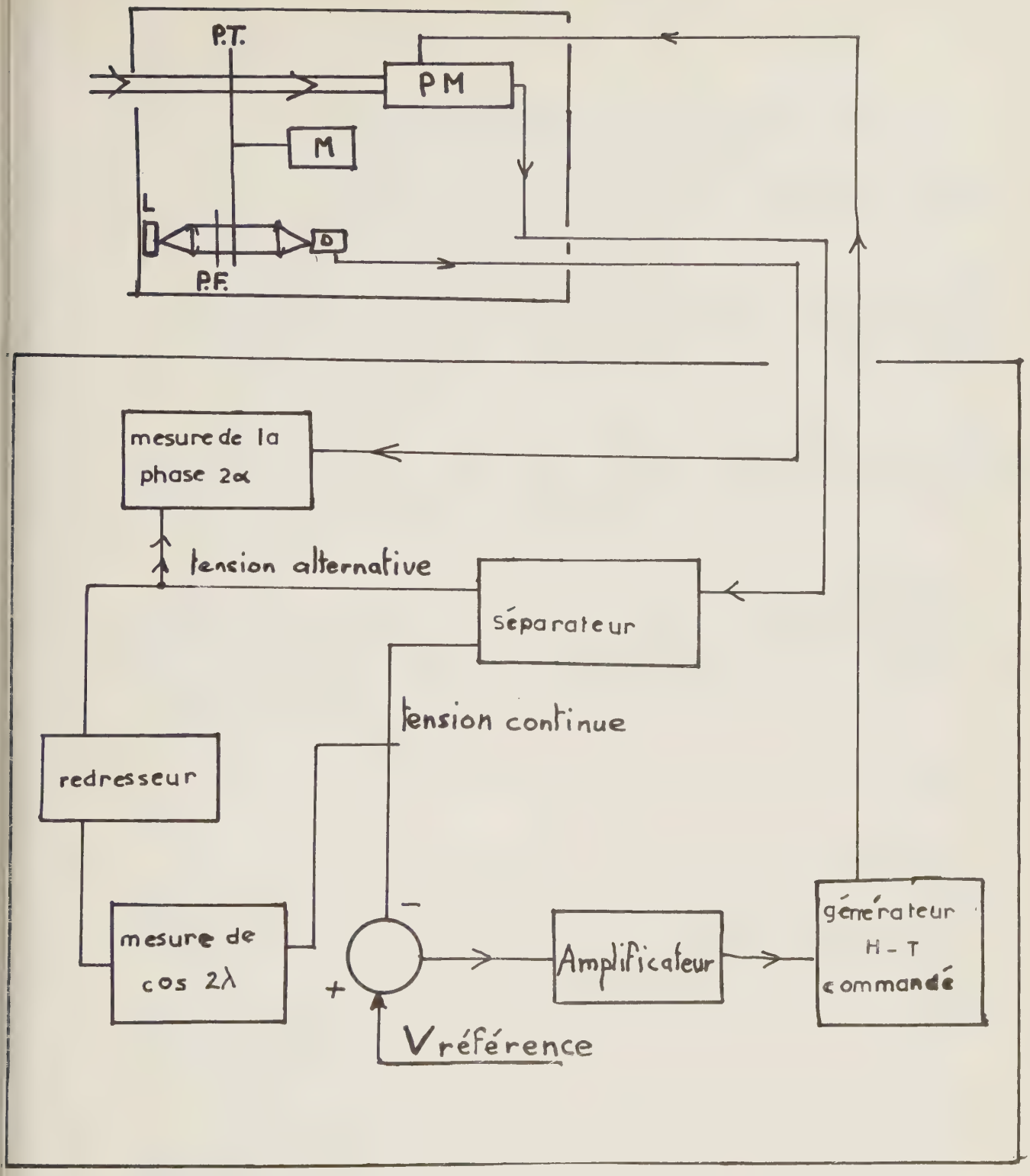

P.T.
PM
M
L
D
P.F.
mesure de la phase 2α
tension alternative
séparateur
tension continue
redresseur
mesure de cos 2λ
−
+
Amplificateur
générateur H - T commandé
V référence

figure 50

IV.1.6.2. Ellipsomètre type ROBERT

La réalisation pratique de cet appareil de mesure a été faite par A.ROBERT au S.T.C.A.N.

Le schéma complet de cet appareil se trouve figure 50. Un disque polaroïd tournant P.T. est suivi d'un photomultiplicateur P.M. Le moteur M tourne à 12.000 t/mn.

Un système annexe composé d'une lampe L, d'un polariseur fixe PF et d'une cellule détectrice D, donne un signal sinusoïdal de phase constante servant de référence.

La tension continue, comparée à une référence fixe, permet d'asservir le gain du P.M. de manière à maintenir pratiquement fixe la tension continue, ce qui permet d'éliminer les fluctuations de la source lumineuse.

Un filtre passe bande permet d'éliminer le bruit du P.M.

Pour les mesures, on règle à l'unité au moyen d'un potentiomètre le rapport tension alternative redressée sur tension continue quand la lumière incidente est polarisée linéairement.

Le voltmètre digital permet alors de lire la valeur de cos 2 λ à 10^{-3} près. Un deuxième voltmètre digital permet de lire le déphasage 2 α au degré prés.

On peut remarquer que la méthode de mesure reste valable s'il y a un fond lumineux incohérent, à condition que ce dernier soit constant.

.../

IV.1.6.3. Photoélasticimètre bidimensionnel par transmission

Faisons tomber en un point O d'un modèle une lumière monochromatique polarisée circulaire droite (figure 51).

Supposons de plus qu'en ce point le déphasage φ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et que l'axe rapide fasse un angle θ avec la direction de référence. A la sortie du modèle, selon la représentation de Poincaré le point représentatif de la vibration est passé de P en M, déduit de P par une rotation d'angle φ autour de l'axe q'q (figure 52)

L'ellipsomètre donne les caractéristiques de l'ellipse représentée par le point M, à savoir cos 2λ et 2α. Il est aisé sur la figure 52 de relier ces paramètres à ceux définissant le biréfringent traversé; la position de l'axe rapide du biréfringent est donnée, à π près, par la relation :

$$2\,\theta = 2\,\alpha + \frac{\pi}{2} \qquad (138)$$

Et la valeur du déphasage est donnée, à π prés par la relation

$$\sin\varphi = \cos 2\,\lambda \qquad (139)$$

Les deux voltmètres associés à l'ellipsomètre donnent donc à π prés, les valeurs : sin φ et $2\,\theta - \frac{\pi}{2} = 2\,\alpha$.

Pour lier ces valeurs à la mesure des contraintes de façon biunivoque, il est nécessaire d'instituer une règle des signes.

.../

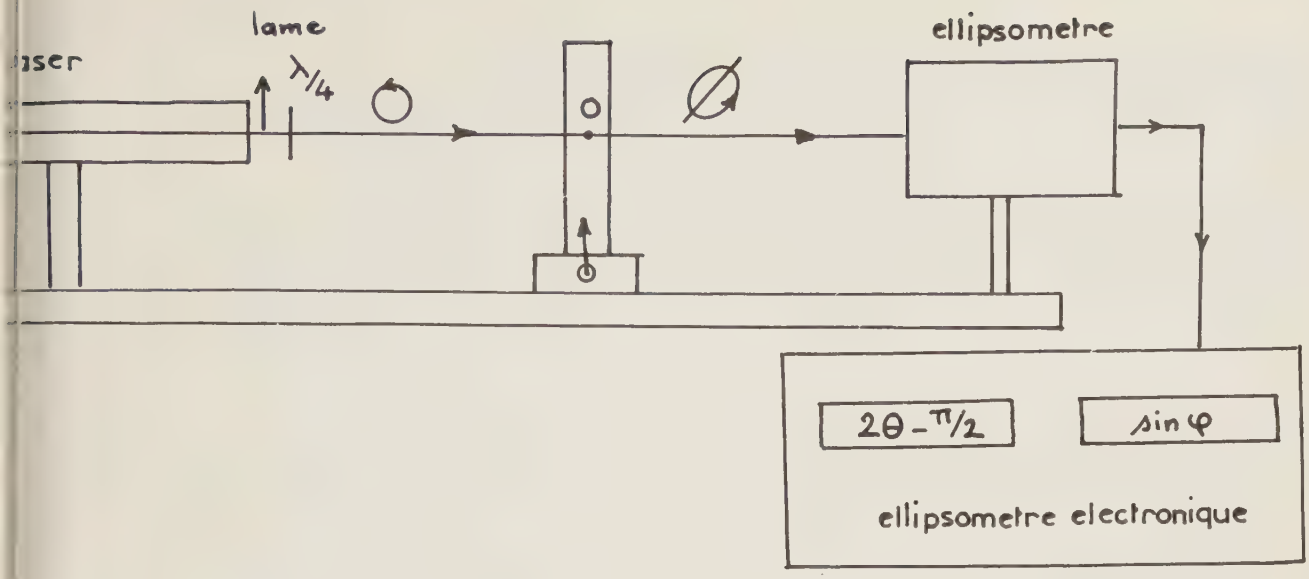


figure 51

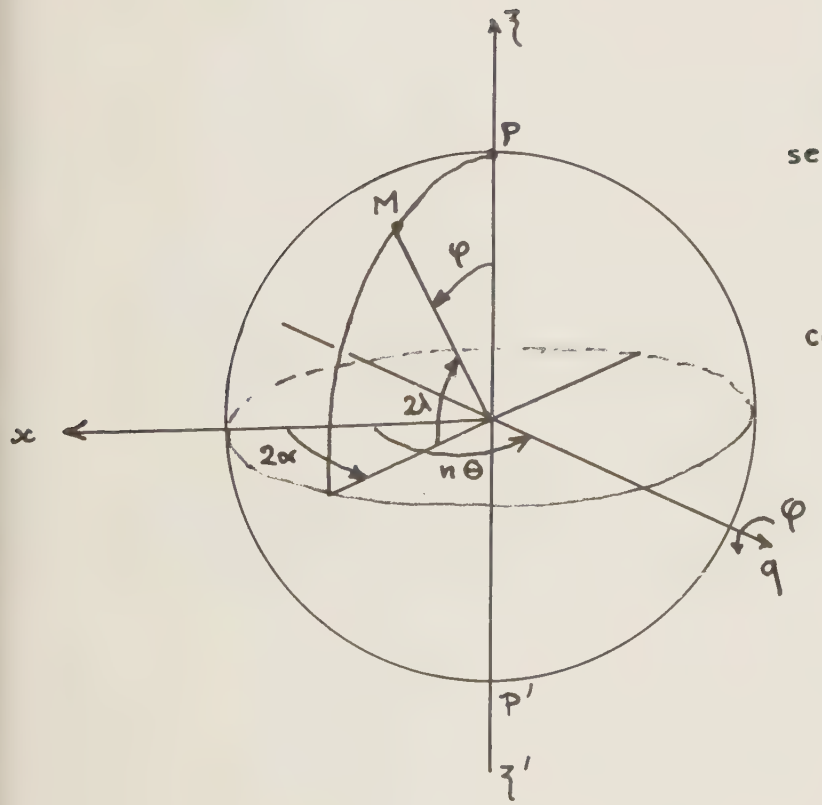


figure 52

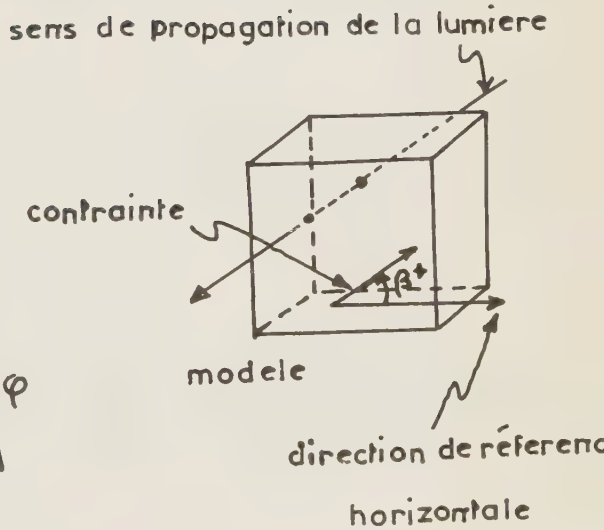


figure 53

Pour déterminer φ à 2π prés, il faut procéder par continuité à partir d'un point du modèle.

Pour déterminer la valeur de l'angle β que fait, avec la direction de référence, la direction de la plus grande des deux contraintes principales en valeur algébrique, on procède de la manière suivante :

Dans le cas de la lumière incidente circulaire droite (Pôle P de la sphère de Poincaré), le grand axe de l'ellipse de lumière image se déduit de l'axe rapide du biréfringent par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de la ligne des pôles si $0 < \varphi < \pi$, et par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ si $\pi < \varphi < 2\pi$. Pour les valeurs de φ dépassant 2π, ces résultats restent valables à condition de retrancher un multiple de 2π à la valeur φ.

Dans le cas de la lumière incidente circulaire gauche (Pôle P' de la sphère de Poincaré), ces résultats sont inversés.

D'autre part, l'axe rapide du biréfringent est confondu avec la plus petite des deux contraintes principales en valeur algébrique si le coefficient photoélastique du modèle est positif. Il lui est orthogonal si le coefficient est négatif.

On résume ces conventions en une formule, donnant <u>l'angle β en degrés de la plus grande des deux contraintes principales en valeur algébrique avec la direction de référence horizontale</u> :

$$\boxed{\beta = \alpha + (\in \in' \times 45) + (k - 2)\, 90} \qquad (140)$$

.../

dans laquelle α et β sont exprimés en degrès et où :

$k = 1$ si le coefficient photoélastique est positif
$k = 0$ si le coefficient photoélastique est négatif
$\epsilon' = +1$ si la lumière incidente est circulaire droite
$\epsilon' = -1$ si la lumière incidente est circulaire gauche
$\epsilon = +1$ si $0 < \varphi < \pi$
$\epsilon = -1$ si $\pi < \varphi < 2\pi$

Les conventions de signe sont données par la figure (53)

Enfin, φ est relié à la différence des contraintes principales par la relation (50) du paragraphe IV.1.4.1., à savoir :

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi e}{\lambda} \times B\,(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \text{avec } B = -\frac{1}{2}\, n_0^{\,3}\,(\pi_{11} - \pi_{12}) \end{array}} \qquad (141)$$

Connaissant les paramètres enregistrés, on peut ensuite séparer les contraintes, soit par le calcul comme au paragraphe IV.1.2.3., soit en utilisant une méthode de mesure holographique donnant $\sigma_1 + \sigma_2$ comme au paragraphe IV.1.5.2.1., ou mieux comme au paragraphe IV.1.5.3.4.1. qui permet de conserver le même modèle pour les deux séries de mesures.

.../

IV.2. Echantillon transparent tridimensionnel

Pour mesurer des contraintes à l'intérieur d'un matériau tridimensionnel sans modifier ce matériau, il faut utiliser un rayonnement capable de le traverser. Dans le domaine optique visible, il faut donc encore réaliser des maquettes en matériaux photoélastiques transparents.

Mais les choses se compliquent considérablement car il faut d'abord mesurer neuf paramètres en chaque point au lieu de cinq. Ces paramètres sont :

- trois paramètres de position du point : x, y, z
- trois paramètres de directions d'une des contraintes principales : α, β, γ
- trois paramètres de valeurs des contraintes principales : σ_1, σ_2, σ_3

On sait que α, β, γ sont liés par la relation des cosinus directeurs et que les directions des trois contraintes principales forment un trièdre trirectangle.

Deux voies théoriques paraissent possibles :

- l'extensométrie à partir des formules (12) du paragraphe II.1.2.3.
- la photoélasticimétrie à partir des formules (28) du paragraphe II.3.2.

En effet, <u>si l'on se place sur les axes principaux</u>, les formules (12) permettent d'écrire :

.../

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E}{1+\nu} \quad (e_1 - e_2)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{E}{1+\nu} \quad (e_2 - e_3) \qquad (142)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{E}{1+\nu} \quad (e_3 - e_1)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{E}{1-2\nu} \quad (e_1 + e_2 + e_3)$$

Le groupe d'équations (142) donne les résultats suivants :

$$\sigma_1 = C\, e_1 + D\, (e_2 + e_3)$$

$$\sigma_2 = C\, e_2 + D\, (e_3 + e_1) \qquad (143)$$

$$\sigma_3 = C\, e_3 + D\, (e_1 + e_2)$$

avec $C = E \dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $D = E \dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Si l'on peut mesurer les trois déformations en un point selon les directions principales des contraintes, on peut donc en déduire les contraintes principales.

Aucun moyen de mesure n'a permis à ce jour d'atteindre e_1, e_2 et e_3 à l'intérieur du matériau. Seules les contraintes de surfaces peuvent donc actuellement être atteintes par ce procédé (voir le paragraphe IV.3.)

<u>Si l'on se place également sur les axes principaux</u>, les formules (28) permettent d'écrire :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{-2}{n_0^{\,3}(\pi_{11} - \pi_{12})} (n_1 - n_2)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{-2}{n_0^{\,3}(\pi_{11} - \pi_{12})} (n_2 - n_3) \qquad (144)$$

.../

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{-2}{n_0^3(\pi_{11} - \pi_{12})}(n_3 - n_1)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{-2}{n_0^3(\pi_{11} + 2\pi_{12})}(n_1 + n_2 + n_3) - \frac{6}{n_0^2(\pi_{11} + 2\pi_{12})} \qquad (144)$$

Le groupe d'équations (144) donne les résultats suivants :

$$\sigma_1 = \frac{6}{3A-B}\left[\frac{A}{B}n_1 + \frac{3A+B}{6B}(n_2 + n_3) - n_0\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{6}{3A-B}\left[\frac{A}{B}n_2 + \frac{3A+B}{6B}(n_3 + n_1) - n_0\right] \qquad (145)$$

$$\sigma_3 = \frac{6}{3A-B}\left[\frac{A}{B}n_3 + \frac{3A+B}{6B}(n_1 + n_2) - n_0\right]$$

avec $A = -\frac{1}{2}n_0^3(\pi_{11} + \pi_{12})$ et $B = -\frac{1}{2}n_0^3(\pi_{11} - \pi_{12})$

Nous allons voir que l'on ne peut pas atteindre les équations (145) physiquement car cela nécessiterait de mesurer n_1, n_2 et n_3, mais que l'on peut par contre atteindre physiquement les 3 premières équations (144).

Par le calcul, et connaissant les conditions aux limites, on peut alors atteindre les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.

Les trois premières équations (144) expriment d'ailleurs que le déviateur du tenseur des tensions est isomorphe au déviateur du tenseur des permittivités, ce que l'on a déjà vu dans la partie théorique.

IV.2.1. Source polarisée à l'intérieur d'un matériau

Pour pouvoir mesurer l'effet d'un biréfringent à l'intérieur d'un matériau, il faut placer dans ce matériau une source de lumière définie en polarisation quel que soit ce point. Or, on

.../

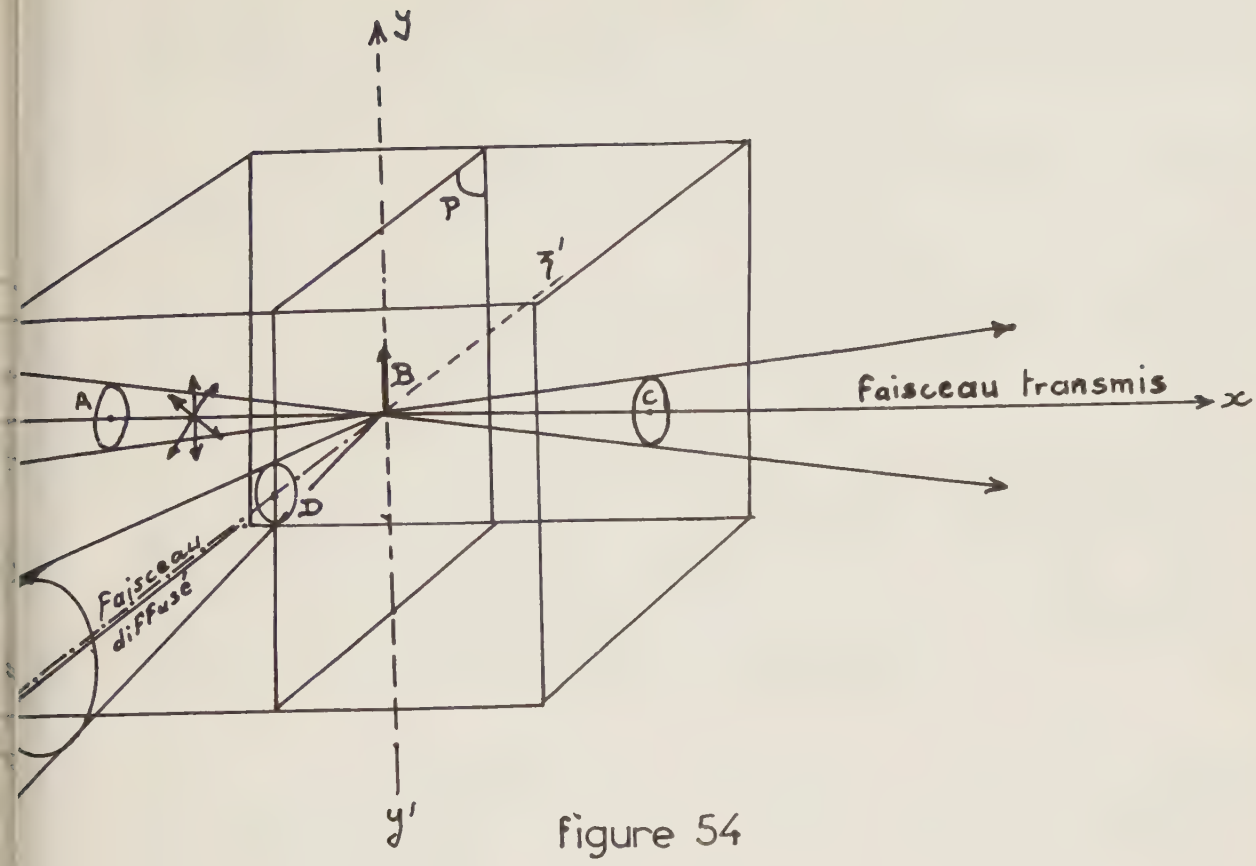


figure 54

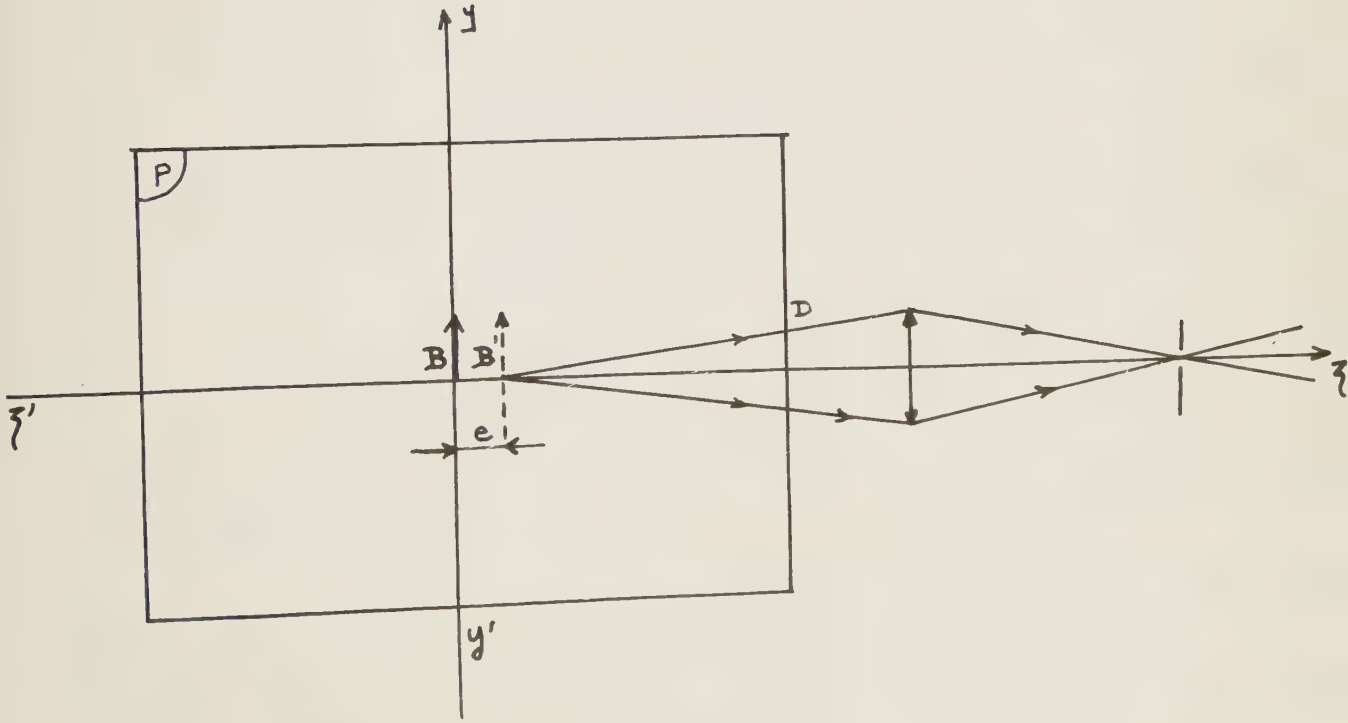


figure 55

voit sur la figure (54) que la polarisation du faisceau transmis sera modifiée par le trajet AB avant de servir de source en B.

On utilise alors le fait que la diffusion Rayleigh polarise la lumière de la manière suivante :

On envoie sur le point B un faisceau incident AB de lumière non polarisée. La traversée du biréfringent AB ne modifie pas l'état de polarisation de la source, qui reste non polarisée en B.

Si l'on regarde la diffusion Rayleigh dans la direction BD perpendiculaire à la direction AB, la polarisation de B sera la projection dans le plan P des vecteurs $\vec{E}$: on obtient ainsi un vecteur résultant $\vec{E}$ perpendiculaire à AB et BD. On obtient donc en B une source de lumière polarisée linéairement.

Après avoir traversé le biréfringent BD, la lumière est devenue elliptique et on peut mesurer ses caractéristiques à l'ellipsomètre. Déplaçons ensuite l'objet selon la direction z'z d'observation. (voir figure 55). On va obtenir en B' une source de lumière polarisée linéairement selon y'y. La lumière traverse alors le biréfringent B'D et devient également elliptique. Nous allons voir que dans certaines conditions d'orientations d'axes, on peut déduire le biréfringent BB' de la mesure des cractéristiques des deux ellipses précédentes. Cette méthode a été développée par A.ROBERT au S.T.C.A.N.

IV.2.2. Composition de deux biréfringents

Considérons un biréfringent de déphasage φ_2, il est toujours possible de choisir la direction de référence condondue avec l'axe rapide de ce biréfringent.

Plaçons devant lui un biréfringent φ_1 dont l'axe rapide fait un angle θ_1 avec la direction de référence (voir figure 56). Ces deux biréfringents, représentés sur la sphère de Poincaré par des rotations successives d'angle φ_1 et φ_2 autour des axes O_{q1} et O_{q2} (figure 57), sont équivalents à un biréfringent de déphasage φ_3, représenté par

.../

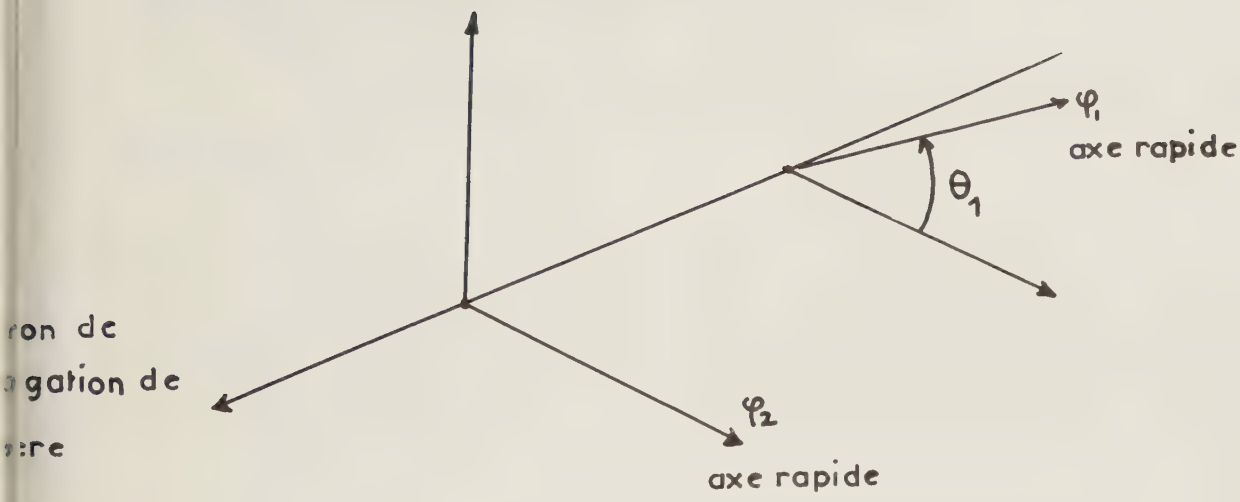


figure 56

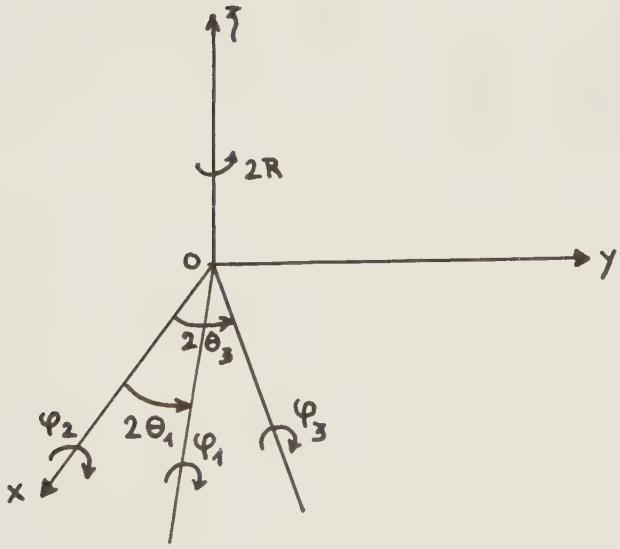


figure 57

une rotation autour de l'axe O_{q3}, suivi d'un pouvoir rotatoire R, représenté par une rotation d'angle 2R autour de Oz.

La matrice de transformation représentant les rotations φ_1 et φ_2 est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & -\sin 2\theta_1 & 0 \\ \sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 & 0 \\ -\sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{146}$$

La matrice de transformation représentant les rotations φ_3 et 2R est :

$$B = \begin{bmatrix} \cos 2R & -\sin 2R & 0 \\ \sin 2R & \cos 2R & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_3 & -\sin 2\theta_3 & 0 \\ \sin 2\theta_3 & \cos 2\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_3 & \sin 2\theta_3 & 0 \\ -\sin 2\theta_3 & \cos 2\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{147}$$

et on doit avoir A = B, ce qui donne 9 relations telles que

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i \in 1,3 \quad , \quad j \in 1,3$$

Parmis celles-ci, les relations $a_{13} = b_{13}$, $a_{23} = b_{23}$ et $a_{33} = b_{33}$ permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta_1 = \dfrac{-\sin 2\theta_3 \sin\varphi_3}{\sin\varphi_2 - \cos 2\theta_3 \sin\varphi_3} \\[2ex] \cos\varphi_1 = \dfrac{\sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \cos 2(\theta_3-\theta_1) \cos 2\theta_1 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}{\sin^2\varphi_2 \cos^2 2\theta_1 + \cos^2\varphi_2} \end{cases} \tag{148}$$

.../

Si on connait φ_2, θ_3 et φ_3, on peut en déduire θ_1 et φ_1. Le pouvoir rotatoire R n'est donc pas nécessaire.

IV.2.3. Photoélasticimètre tridimensionnel

Reprenons la figure (55).

Le matériau B'D peut être assimilé à une suite de biréfringents, équivalente à un biréfringent unique φ_2 dont les axes font un angle θ_2 avec une direction de référence, suivi d'un pouvoir rotatoire R_2.

Quand on passe de B'D à BD, on ajoute devant l'ensemble précédent un biréfringent φ_1 inconnu, dont les axes font un angle θ_1 inconnu avec la direction de référence. De B en D, le corps équivaut à un biréfringent φ_3, dont les axes font un angle θ_3 avec la direction de référence, suivi d'un pouvoir rotatoire R_3.

En ce qui concerne les pouvoirs rotatoires, seule la différence $R = R_3 - R_2$ intervient. La direction de référence étant arbitraire, nous pouvons poser $\theta_2 = 0$, c'est à dire prendre comme référence les axes du premier biréfringent mesuré.

Il est alors possible de déterminer φ_1 et θ_1, comme on vient de la voir ci-dessus, par les formules (148).

Le pouvoir rotatoire constitue une donnée redondante, mais sa connaissance complète heureusement les mesures.

IV.2.3.1. Détermination des axes et du déphasage

Pour déterminer les axes et le déphasage de chaque biréfringent équivalent, faisons tourner le corps autour de la direction z'z (figure 55).

.../

La direction de la polarisation de la lumière, fixe dans l'espace, va occuper diverses positions successives par rapport aux axes du biréfringent équivalent.

La représentation des biréfringents sur la sphère de Poincaré montre immédiatement que deux vibrations linéaires incidentes donnant des vibrations elliptiques de même aplatissement sont symétriques par rapport aux axes du biréfringent ou par rapport à la direction à 45° de ces axes, et ceci quel que soit le pouvoir rotatoire. Les axes du biréfringent équivalent peuvent ainsi être déterminés.

D'autre part, à la sortie de l'ellipsomètre, le rapport de la tension alternative à la tension continue est maximal lorsque la vibration incidente est parallèle aux axes du biréfringent et minimal lorsque elle est sur la bissectrice des axes. La valeur maximale de ce rapport étant normalisée à 1, la valeur minimale donne directement la valeur absolue du cosinus du déphasage, comme le montre la figure (58).

En effet, M passe en M' et on mesure OH.

$$|\cos \varphi| = \cos 2\lambda \qquad (149)$$

Partant de la surface du corps, φ est alors déterminé par continuité. Si l'on veut connaitre le pouvoir rotatoire, il suffit de mesurer la phase du signal alternatif. Enfin, s'il y a ambiguité sur la position de l'axe rapide, il suffit de mesurer le sens de rotation de la forme de lumière au moyen de la lame quart-d'onde escamotable.

.../

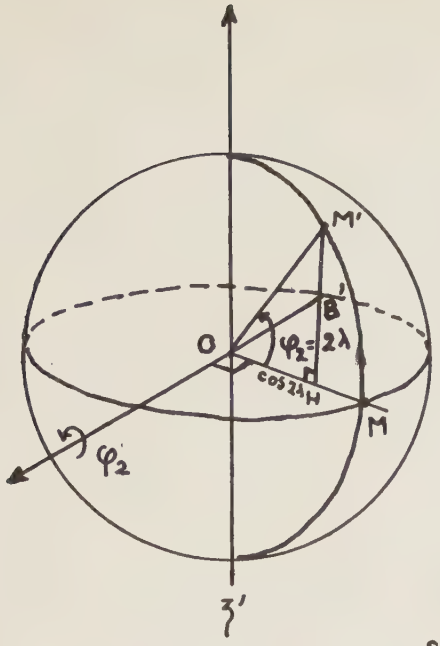


figure 58

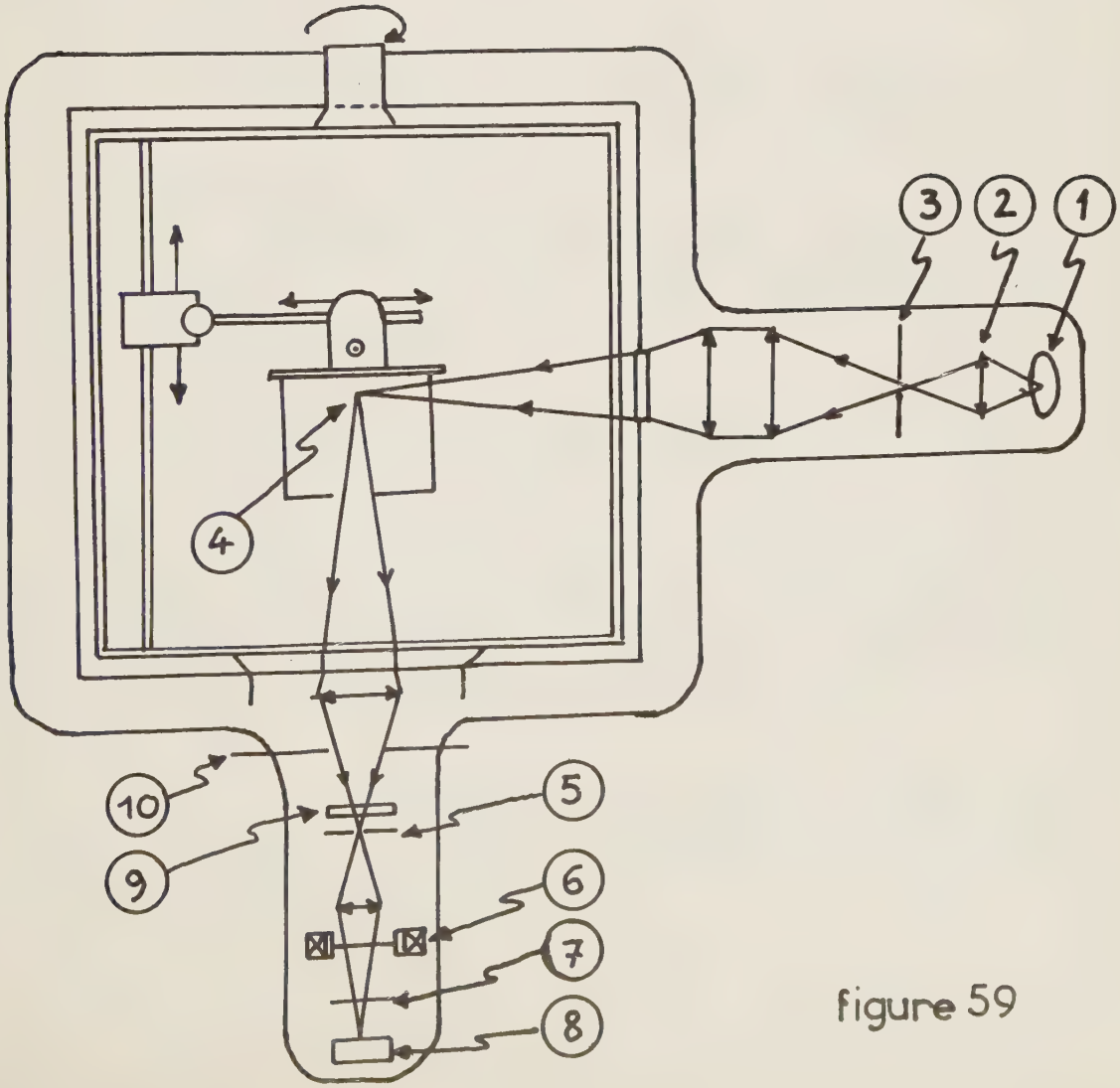


figure 59

Après avoir mesuré ainsi θ_2, φ_2, θ_3 et φ_3, le calcul des équations (148) donne enfin les valeurs cherchées θ_1 et φ_1.

Comme on connait l'épaisseur du biréfringent BB' (figure 55) on peut alors calculer $n_1 - n_2$:

$$n_1 - n_2 = \frac{\lambda}{2\pi e} \varphi_1 \qquad (150)$$

La première équation (144) donne alors $\sigma_1 - \sigma_2$.

En répétant tout le processus ainsi défini dans les deux directions orthogonales du trièdre défini par θ_1, on peut ainsi mesurer $\sigma_2 - \sigma_3$ et $\sigma_3 - \sigma_1$.

On connait n_0 qui est l'indice de réfraction du milieu au repos.

Les trois équations (150) ainsi définies permettent alors de résoudre le système (145), c'est à dire de séparer les contraintes à trois dimensions.

IV.2.3.2. Réalisation de l'appareil de mesure

Le montage est représenté figure (59). Pour que le point éclairé dans le corps à étudier soit fixe, on immerge tout le modèle dans une cuve remplie d'un liquide dont l'indice est le même que n_0, ce qui élimine les effets de bord de l'objet.

Le corps peut, d'une part subir des translations suivant trois directions, d'autre part, être entrainé en rotation autour de l'axe d'observation.

.../

L'optique d'entrée se compose d'une lampe (1) alimentée en continu, d'un condenseur (2) et d'un diaphragme (3). Le pinceau lumineux traverse un hublot et converge en (4) au point étudié du modèle. A l'aide d'un système optique fixe, on forme l'image du point (4) sur une fente (5) de largeur règlable orthogonale à l'axe du pinceau lumineux dans le modèle. On isole ainsi un faisceau de lumière diffusée émis par le point étudié et d'axe confondu avec l'axe d'observation et de rotation. Ce faisceau traverse l'analyseur tournant (6), puis un filtre interférentiel (7) et tombe sur le photomultiplicateur (8). Une lame quart-d'onde orientable et escamotable (9) est placée devant la fente (5). Un diaphragme iris (10) permet de faire varier l'ouverture du cône de lumière diffusée.

L'électronique qui suit la photomultiplicateur est la même que celle du paragraphe IV.1.6.2.

Les expériences effectuées sur l'appareil au STCAN, ont montré que la précision obtenue sur la mesure des biréfringents équivalents était de l'ordre de 10^{-3} pour cos φ et de l'ordre de 0,1 degrés pour la position des axes. Enfin, les pouvoirs rotatoires sont mesurés au degrè près.

.../

IV.3. Echantillon opaque ou structure réelle

Les chapitres IV.1. et IV.2. concernent des maquettes photoélastiques transparentes ayant la même forme que les structures réelles à construire. Il y a des problèmes de réduction d'échelle et des problèmes de réalisation des structures réelles (soudures, rivetages, etc) qui font que les mesures faites sur maquettes doivent être vérifiées sur les structures réelles.

Ces structures sont presque toujours opaques aux rayons lumineux. On ne pourra donc faire que des mesures de surface.

Ces mesures serviront a étalonner les courbes mesurées sur la maquette et à vérifier leur justesse.

Il faut préciser également que si l'on connait la géométrie d'un objet et les contraintes de surface de cet objet, on peut obtenir théoriquement par le calcul les contraintes en tous les points à l'intérieur de cet objet.

Deux voies sont alors possibles :

- l'extensométrie à partir des formules 12 du paragraphe II.1.5
- la photoélasticimétrie à partir des formules 28 du paragraphe II.3.2., à condition de coller sur la surface de la structure un vernis photoélastique transparent et d'observer par réflexion.

L'extensométrie n'est pas directement utilisable par un opticien. Ce qu'il peut mesurer, c'est le vecteur déplacement, et ceci n'est pas si simple. Mais on peut passer du vecteur déplacement aux déformations si l'on a mesuré ces vecteurs sur toute une surface, par exemple.

.../

La photoélasticimétrie par réflexion fera l'objet du chapitre IV.3.2. Elle peut se faire, soit par franges, soit par ellipsométrie, c'est la plus facile à mettre en oeuvre.

IV.3.1. Mesure absolue de déplacements

La méthode présentée succintement ici est due à J. MONNERET [2]. Elle est la seule méthode absolue que je connaisse qui puisse déterminer les déplacements des points d'un objet non plan.

Elle est basée sur la notion de rayons homologues: Une onde diffractée par un objet diffusant possède une structure très irrégulière. Lorsque la surface d'un objet se déforme, M_1 venant en M_2 (figure 60), l'onde diffractée correspondante se déplace, Q_1 venant en Q_2. On appelle rayons homologues, un couple tel que $M_1\ Q_1$, $M_2\ Q_2$.

Faisons un hologramme par double exposition de l'objet avant et après déplacement. A la restitution, les deux surfaces d'ondes ϵ_1 et ϵ_2 vont battre et donner des franges dans la région I où les rayons homologues sont les plus rapprochés.

On montre que la visibilité de ces franges dans un plan d'observation donné est égale à la fonction d'intercorrélation normalisée des ondes restituées dans ce plan, elle même égale à la transformée de Fourier de la pupille de sortie du système d'observation. On peut alors en déduire une méthode de mesure :

Considérons (figure 61) un couple de rayons homologues $M_1\ I_1$, $M_2\ I_2$, de rayons unitaires $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Au voisinage du plan d'observation P, les ondelettes homologues interférentes, normales à $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, se coupent suivant la perpendiculaire commune $\vec{P}$ aux deux rayons. $\vec{P}$ est donc parallèle aux franges, l'interfrange étant égal à $\frac{\lambda}{\alpha}$. La perpendiculaire commune $\vec{P}$ n'est dans le plan de meilleur contraste que si la pupille du système d'observation est de révolution autour de IM.

.../

La distance d séparant la perpendiculaire commune du plan de l'image holographique est donnée par :

$$d = \frac{HJ}{\alpha} \tag{151}$$

La projection M_1H du vecteur déplacement $\vec{a}$ dans un plan π normal à la direction moyenne d'observation vaut :

$$M_1H = \left[(\alpha\ d)^2 + p^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{HJ}{\cos\gamma} = \frac{d\lambda}{\epsilon\ \cos\gamma} \tag{152}$$

La longueur de $\vec{P}$ peut être mesurée à partir des deux positions du plan P où la visibilité des franges s'annule. Il est souvent plus facile de déterminer l'orientation de la projection de $\vec{a}$ dans le plan π en utilisant une fente pour diaphragmer le faisceau de restitution.

Quand on tourne la fente, la visibilité des franges dans le plan de l'image holographique passe par un maximum lorsque la direction de la fente est normale à la projection M_1H cherchée.

On procède donc comme suit :

1°) Recherche du plan de meilleur contraste (diaphragme circulaire) Mesure de la distance de localisation "d" et de l'interfrange "i".

2°) Mise en place d'un diaphragme fente et détermination de l'angle γ qu'il doit faire avec la direction des franges pour que ces dernières aient une visibilité maximale dans le plan de l'image holographique.

La formule (152) donne alors M_1H, projection du vecteur déplacement $\vec{a}$ sur la direction orthogonale à la direction de regard.

.../

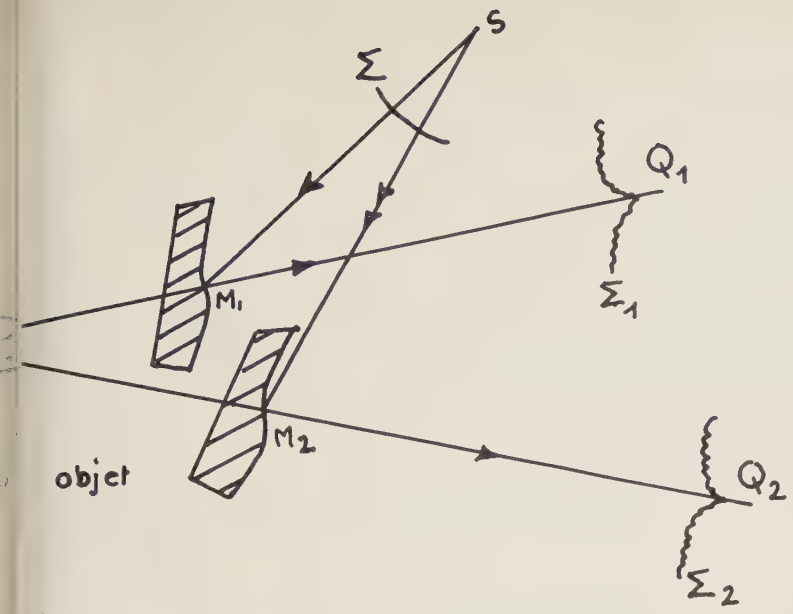


figure 60

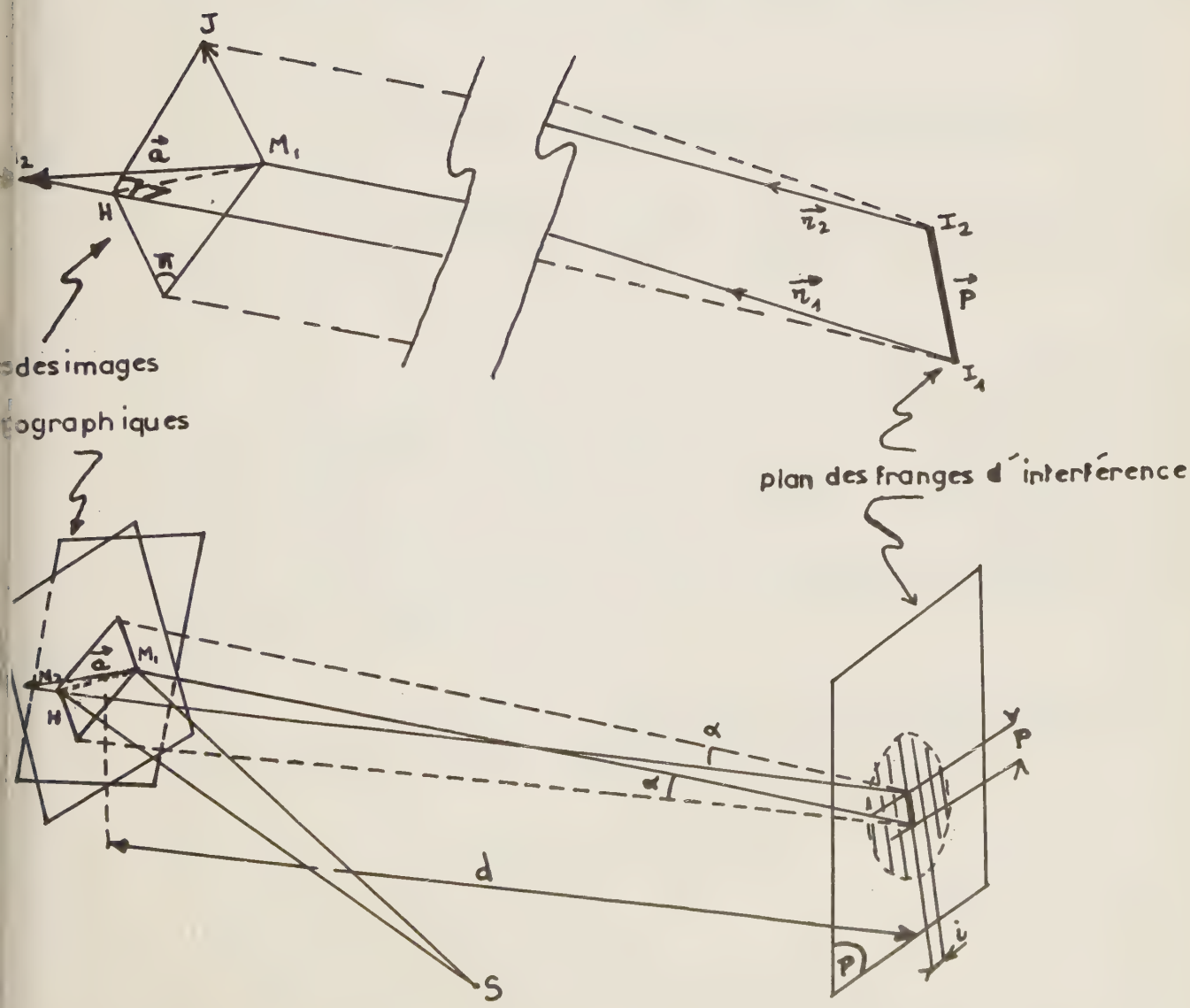


figure 61

En renouvelant ensuite les mêmes mesures dans deux directions orthogonales de l'espace, on obtient les trois projections orthogonales du vecteur déplacement cherché.

Il faut donc faire trois hologrammes à la fois, placés en trièdre tri-rectangle.

Cette méthode n'a malheureusement pas une bonne précision (de l'ordre de 20%) et elle est assez difficile à mettre en oeuvre. Mais elle est la seule mesure absolue puisque l'objet n'est pas touché.

IV.3.2. Photoélasticimétrie par réflexion

Prenons une structure réelle (S) et collons sur sa surface un vernis (V) photoélastique transparent d'épaisseur e (voir figure 62). Ensuite appliquons des forces sur (S).

En un point M de (S), à l'intérieur de la structure, il va apparaitre des tensions, mais comme M est un point du contour de (S), une des contraintes principales, par exemple σ_3, qui sera normale à la surface de (S) sera nulle, le point M n'étant pas contraint vers l'extérieur. Il suffit donc de mesurer en M, σ_1 , σ_2 et l'angle α que font ces contraintes par rapport à un axe de référence. On retrouve un problème bidimensionnel.

Les formules (142) du paragraphe IV.2. permettent de relier les contraintes de (S) aux déformations de (S) en M :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_S = \frac{E_S}{1+\nu_S} (e_1 - e_2)_S \qquad (153)$$

.../

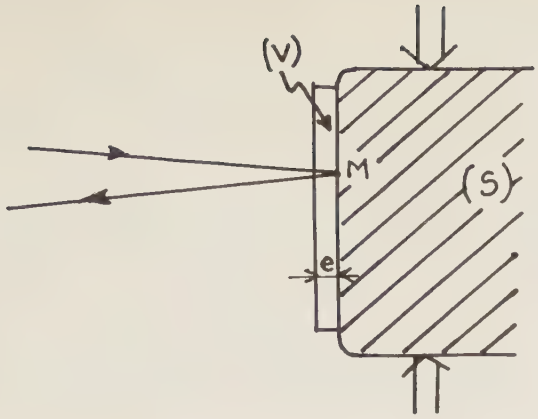


figure 62

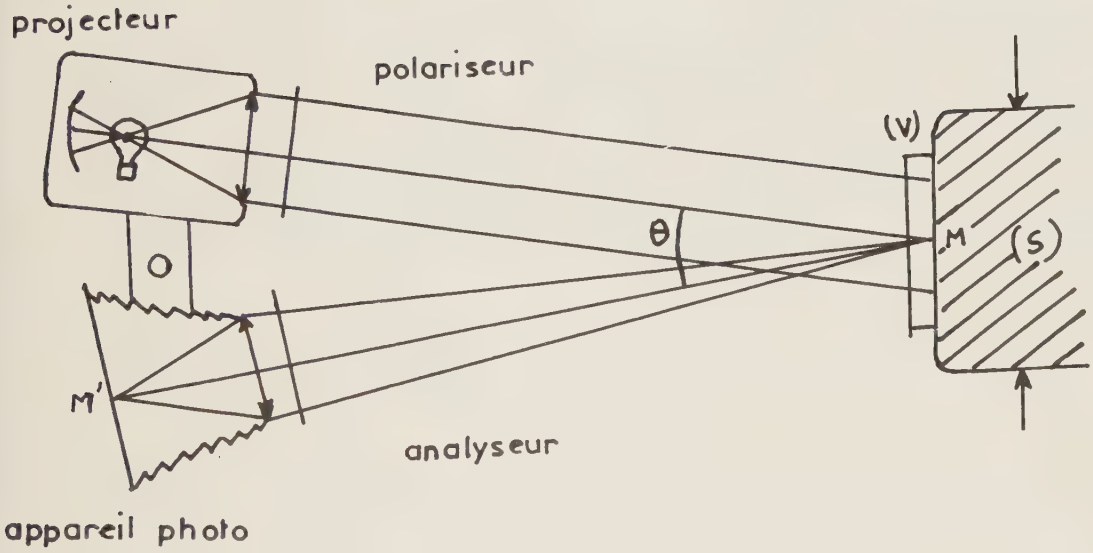


figure 63

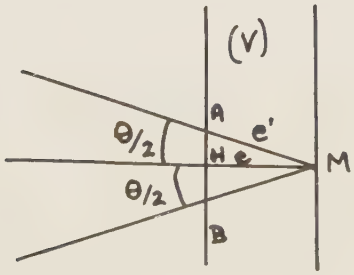


figure 64

Le troisième formule (143) permet également d'écrire :

$$\epsilon_3 = -\frac{D}{C}(e_1 + e_2) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \qquad (154)$$

On voit que ϵ_3 n'est pas nul, mais le vecteur déplacement correspondant étant normal à la surface de (S), le vernis collé en M va seulement se déplacer selon l'axe optique et l'influence de ϵ_3 sur l'apparition de contraintes dans le vernis sera nulle. Par contre, si le vernis est collé <u>sans possibilité de glissement</u>, alors ϵ_1 et ϵ_2 vont être transmis intégralement au vernis : Au point M dans le vernis,

$$(e_1)_V = (e_1)_S \quad \text{et} \quad (e_2)_V = (e_2)_S \qquad (155)$$

Ces déformations du vernis font apparaitre au point M dans le vernis, des contraintes, que l'on peut relier à ces déformations par la formule (142) :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_V = \frac{E_V}{1+\nu_V}(e_1 - e_2)_V \qquad (156)$$

Les relations (153), (155) et (156) permettent de lier les containtes de (S) en M aux contraintes de (V) en M :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_S = \frac{E_S}{E_V}\,\frac{1+\nu_V}{1+\nu_S}\,(\sigma_1 - \sigma_2)_V \qquad (157)$$

Il est de plus évident que les directions de ces contraintes sont confondues :

$$(\alpha)_S = (\alpha)_V \qquad (158)$$

.../

Enfin, la résine étant photoélastique, on peut relier la biréfringence du vernis aux contraintes dans ce vernis, donc aux contraintes dans le matériau (S), grâce à la relation (144) :

$$(n_1 - n_2)_V = -\tfrac{1}{2}\, n_{0V}^{\,3}\, (\pi_{11} - \pi_{12})_V\, (\sigma_1 - \sigma_2)_V \qquad (159)$$

qui donne avec l'équation (157) :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_S = -\frac{E_S}{E_V} \times \frac{1+\nu_V}{1+\nu_S} \times \frac{2}{n_{0V}^{\,3}(\pi_{11} - \pi_{12})_V}\,(n_1 - n_2)_V \qquad (160)$$

La résine ayant une épaisseur e en M, la différence d'indices précédente va faire apparaitre un déphasage φ tel que :

$$\varphi = 2\,\frac{2\pi}{\lambda}\, e(n_1 - n_2)_V \qquad (161)$$

D'où la relation linéaire entre φ et les contraintes de (S) en M :

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)_S = -\frac{E_S}{E_V} \times \frac{1+\nu_V}{1+\nu_S} \times \frac{1}{n_{0V}^{\,3}(\pi_{11} - \pi_{12})_V} \times \frac{\lambda}{2\pi e} \times \varphi} \qquad (162)$$

Cette relation est valable si on néglige la variation d'épaisseur δe du vernis, devant e, ce que l'on a déjà justifié plus haut.

La formule (162) permet de dire que si on visualise les isochromes du vernis, on obtient des lignes d'égales différences de contraintes principales dans le matériau (S).

.../

Ces isochromes peuvent être visualisées soit par une méthode de photoélasticimétrie classique analogue à celle du paragraphe IV.1.2. mais adaptée à la réflexion, soit par une méthode polarimétrique déduite de celle du paragraphe IV.1.6.3.

IV.3.2.1. Photoélasticimètre classique par rèflexion

Le montage est représenté figure (63). Sur un même support, on fixe un projecteur et un appareil photographique formant l'image du vernis sur l'émulsion. Un polariseur est placé devant le projecteur et un analyseur dont la direction de polarisation est perpendicualire à celle du polariseur, est placé devant l'appareil photo.

Pour que ce montage fonctionne, il faut que la colle servant à joindre (V) sur (S) diffuse la lumière sans la dépolariser. L'erreur sur la mesure est d'autant plus grande que θ est grand. En effet, l'épaisseur e' que traverse la lumière est : (voir figure 64)

$$e' = \frac{e}{\cos \theta/2} \qquad (163)$$

Il faut donc que l'appareil soit assez loin du modèle.

Enfin, si l'on veut avoir quelques franges dans les conditions classiques de mesures, il faut des épaisseurs de vernis importantes (quelques mm).

Or, l'adjonction d'un vernis sur une structure réelle introduit trois types d'erreurs :

1°) variation de la position de la fibre neutre pour les flexions.
2°) accroissement de la rigidité du modèle
3°) le fait que la lecture est celle d'une déformation moyenne à travers toute l'épaisseur du vernis.

.../

IV.3.2.2. Photoélasticimètre par réflexion sur vernis fins.

Le remède aux trois types d'erreurs ci-dessus consiste à diminuer l'épaisseur du vernis. Mais quand l'épaisseur est telle que ces erreurs soient négligeables, les déphasages obtenus dans les manipulations courantes se traduisent par des écarts de l'ordre d'une frange. La méthode par photoélasticimétrie classique perd donc beaucoup de son intérêt, même en utilisant un compensateur de Babinet pour affiner les mesures.

Par contre, si on utilise un ellipsomètre du type Robert, par exemple, on est encore capable de mesurer mille valeurs dans cet intervalle. Il apparait donc que c'est la méthode polarimétrique qui est la plus précise par réflexion. Cet appareil n'éxistant pas encore, l'un des buts de ce travail a été de concevoir et de réaliser un photoélasticimètre par réflexion utilisant des vernis fins. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre V.

.../

V. PHOTOELASTICIMETRE par REFLEXION

V.1. Schéma de principe de l'appareil

Un faisceau lumineux cohérent issu d'une source S, polarisé rectilignement, pénètre par l'entrée 1 dans un système optique O; il en sort par l'entrée 2 polarisé circulairement, il arrive sur la maquette à mesurer M et traverse deux fois le vernis biréfringent V. Sa polarisation devient elliptique. Il retraverse ensuite le système O par les fenêtres 2 et 3 et arrive sur l'Analyseur A dont le système électronique E donne la direction du grand axe de l'ellipse et l'ellipticité de la lumière. (voir figure 65)

V.1.1. La source S

La source utilisée est un laser Hélium-Néon monomode émettant sur la longueur d'onde 632,8 nm. Le faisceau émis est parallèle, sa divergence étant de l'ordre de 10^{-3} radian. La polarisation de la lumière est linéaire, l'écart à la linéarité étant inférieur à 10^{-4}.

V.1.2. L'ellipsomètre A-E

L'ensemble de l'analyseur A et de son électronique E forment l'ellipsomètre qui est identique à celui du paragraphe IV.1.6.

V.1.3. Le modèle M et son vernis V

Le modèle M peut être en métal ou en tout matériau transparent ou non. Il doit avoir une petite surface plane sur laquelle on dépose, soit une couche mince réfléchissante, soit une couche mince

.../

diffusante. Par dessus cette couche, on colle le vernis photoélastique V dont on connait l'épaisseur e.

De ces deux types de couches minces sont issus deux appareils de mesure différents.

Dans une première étape nous avons réalisé un banc par réflexion pure qui convenait très bien pour la mesure des contraintes dans les maquettes transparentes de dimensions trop grandes pour pouvoir être placées sur le banc par transmission.

On procédait alors en plaçant juste derrière la maquette un miroir plan et on déplaçait ce miroir en même temps que le banc (figure 66).

Puis on a collé sur des éprouvettes d'aluminium poli le vernis photoélastique directement. Mais l'état de surface de l'aluminium introduisait une diffraction telle que la mesure était impossible, le flux entrant dans l'analyseur variant trop en fonction du point d'analyse. De plus le coefficient de réflexion était très mauvais.

Le second essai a consisté à déposer une couche mince d'argent sur une face du vernis photoélastique et de coller ensuite le vernis sur le modèle M par l'intermédiaire de la couche mince (voir figure 67). Le coefficient de réflexion s'est alors considérablement amélioré et l'état de surface du modèle M n'est plus intervenu. Mais il est apparu de nouveaux inconvénients.

Pour que les contraintes du matériau opaque soient bien transmises au vernis, il faut que les collages soient homogènes sur toute la surface, et que la couche mince adhère bien à la résine photoélastique, or, une bonne adhérence ne peut s'obtenir qu'à chaud et le vernis fond avant que la couche mince reflechissante ne tienne suffi-

.../

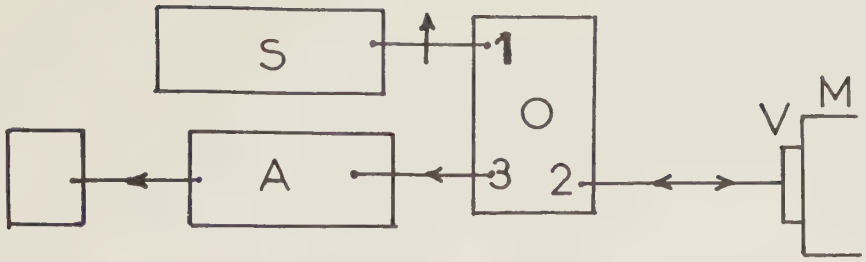


figure 65

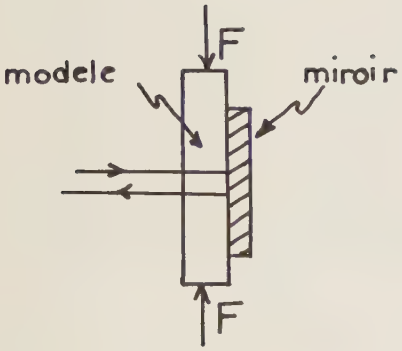


figure 66

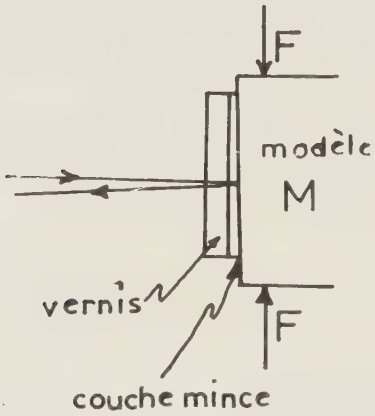


figure 67

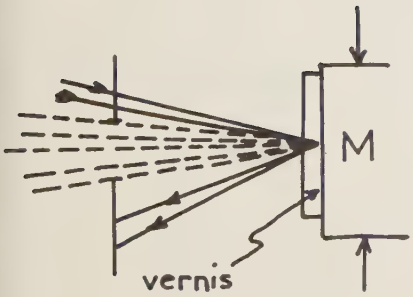


figure 68

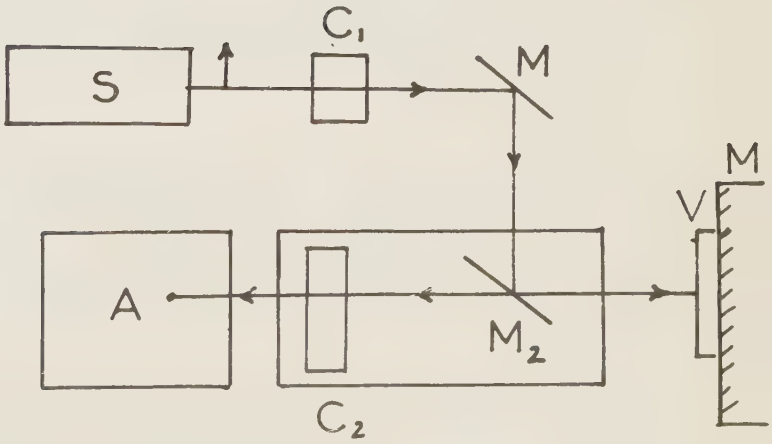


figure 69

samment. Ensuite, la lumière réfléchie par la première face du vernis introduit un flux parasite donc une erreur d'autant plus grande que l'absorption de la résine est grande et que le coefficient de réflexion de la couche mince est faible. Enfin, pour les modèles non plans, la courbure du modèle introduit une divergence du faisceau qui diminue le flux entrant dans l'analyseur.

Dans une deuxième étape, on a réalisé un banc par diffusion qui élimine ces divers inconvénients. La méthode consiste à coller directement sur le modèle M le vernis V au moyen d'une colle contenant de la poussière d'aluminium en suspension. L'état de surface de M n'importe plus. De plus, on éclaire le matériau en incidence légèrement oblique, ce qui élimine le faisceau réfléchi par la première face du vernis. Les problèmes d'adhérence sont aussi également éliminés (voir figure 68).

V.1.4. Le système optique O

V.1.4.1. Première version du banc par réflexion

Le système optique O a beaucoup évolué dans le temps. Le premier montage était composé de quatre éléments : deux compensateurs C_1 et C_2, un miroir M et une lame semi-transparente M_2 (voir figure 69).

Le faisceau lumineux issu de S traverse d'abord C_1, puis se réflechit sur M_1 et M_2. On règle le compensateur C_1 pour que la polarisation arrivant sur l'objet M soit circulaire. C_1 est une lame quart d'onde.

La lumière réfléchie est polarisée elliptiquement. Pour mesurer cette forme de lumière avec l'analyseur A, il faut qu'elle ne soit pas modifiée par la traversée de l'ensemble (M_2 , C_2). Ceci

.../

devant être vrai pour toute contrainte, il faut que l'ensemble (M_2 , C_2) transmette sans déformation toute forme de lumière incidente.

Cette propriété de l'ensemble (M_2, C_2) est celle d'un opérateur unité dans l'espace des formes de lumière ou de Poincaré et un opérateur de densité dans l'espace de Mueller. En effet, la lame M_2 étant dichroïque on ne peut travailler uniquement dans l'espace de Poincaré qui ne tient pas compte des variations d'intensité.

V.1.4.2. Etude de l'opérateur de réflexion - Transmission d'une lame semi-transparente

Au chapitre II.4.3. les formes des matrices de Mueller sont données pour que l'opérateur (M_2, C_2) soit un opérateur densité dont la matrice doit être :

$$d = d \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (164)$$

Il faut d'abord trouver la matrice M_2 de la lame semi-transparente, puis la matrice C_2 telle que $M_2.C_2 = d.I$, et enfin trouver l'objet qui a pour matrice C_2.

Nous avons donc d'abord cherché un moyen de mesurer la matrice M_2.

.../

La relation liant un vecteur de Stockes représentant une lumière incidente au vecteur de stockes représentant la lumière ayant traversé la lame peut s'écrire : $V' = A.V$, soit :

$$\begin{bmatrix} I' \\ M' \\ C' \\ S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix} \qquad (165)$$

On voit que pour définir entièrement la matrice des α_{ij}, il suffit de connaitre quatre couples de vecteurs $(\vec{V}, \vec{V}')$, puis de résoudre un système linéaire de 16 équations à 16 inconnues.

Mais avec l'appareillage existant, on ne peut atteindre directement les composantes des vecteurs de stockes.

Grâce à l'ellipsomètre on sait mesurer α et λ. Si l'on part d'une lumière incidente totalement polarisée : $I_1 = 0$ et alors on peut supposer que la lumière restera toujours totalement polarisée.

Les équations (30 b) donnent le système :

$$\vec{V}_i = \begin{bmatrix} I_i \\ M_i \\ C_i \\ S_i \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} 1 & \\ \cos 2\lambda_i & \cos 2\alpha_i \\ \cos 2\lambda_i & \sin 2\alpha_i \\ \sin 2\lambda_i & \end{bmatrix} \qquad (166)$$

En ne changeant pas l'intensité I_2 de la lumière incidente pour tous les vecteurs objet.

.../

Les vecteurs image auront pour équation :

$$\vec{V}'_i = \begin{bmatrix} I'_i \\ M'_i \\ C'_i \\ S'_i \end{bmatrix} = I'_{2i} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\lambda'_i \cos 2\alpha'_i \\ \cos 2\lambda'_i \cos 2\alpha'_i \\ \sin 2\lambda'_i \end{bmatrix} \qquad (167)$$

Si nous prenons cinq couples de vecteurs $(\vec{V}_i, \vec{V}'_i)$ et si nous posons $I_2 = 1$, nous pouvons mesurer les divers α et λ et calculer les dix valeurs de M, de C et de S.

Il suffit alors de résoudre un système linéaire de 20 équations à 21 inconnues qui sont les 5 intensités I'_{2i} et les 16 coefficients α_{ij} pour connaitre la matrice de Mueller de l'opérateur à une constante près. En effet, pour n'avoir que 20 inconnues, on pose $\alpha_{11} = 1$, ce qui exprime que tous les autres α_{ij} sont divisés par la valeur réelle de α_{11}.

Le montage utilisé pour faire ces mesures est le suivant : (voir photo 12 et figure 70).

La source S est le laser He-Ne. Elle émet un faisceau polarisé linéairement. Une lame L quart d'onde dont les axes sont à 45° de la direction de la lumière incidente transforme cette lumière linéaire en lumière circulaire droite. Un opérateur objet O.O. étalonné transforme cette lumière circulaire en n'importe quelle forme elliptique choisie, sans changer l'intensité de cette lumière. Il est représenté sur la photo 13.

.../

Photo 12

Photo 13

Il est composé d'un polariseur suivi d'une lame quart d'onde. On peut faire tourner les axes de la lame quart d'onde par rapport à l'axe du polariseur, pour définir l'excentricité λ, puis faire tourner l'ensemble des deux, ce qui définit l'angle α.

L'opérateur image OI à mesurer est ensuite placé sur le faisceau. La lumière transmise ou réfléchie est analysée par l'ellipsomètre (AE).

On définit une forme avec O.O. on la mesure. On introduit O.I.On mesure la nouvelle forme et ainsi de suite cinq fois.

Un programme de calcul sur machine a été réalisé. Partant des valeurs précédentes mesurées il donne directement les intensités I' et la matrice de Mueller de l'opérateur Image O.I.

La lame M_2 est composée d'un disque de verre sur lequel a été déposé une couche mince métallique. A incidence normale, le coefficient de transmission est de 50%. On l'utilise avec une incidence de 45°. La matrice de Mueller de M_2 mesurée est alors :

$$M_2 = \begin{bmatrix} +1,000 & -0,453 & -0,010 & -0,033 \\ -0,358 & +1,084 & -0,004 & +0,045 \\ -0,003 & +0,027 & +0,866 & +0,205 \\ +0,032 & -0,080 & -0,188 & +0,876 \end{bmatrix} \qquad (168)$$

On voit qu'elle est composée de dichroïsme suivi de biréfringence à axes pratiquement confondus.

Pour éliminer une partie de la biréfringence, on immerge la lame dans un liquide d'indice égal à celui du verre ce qui élimine les anisotropies dues à la règion (1) (figure 71).

.../

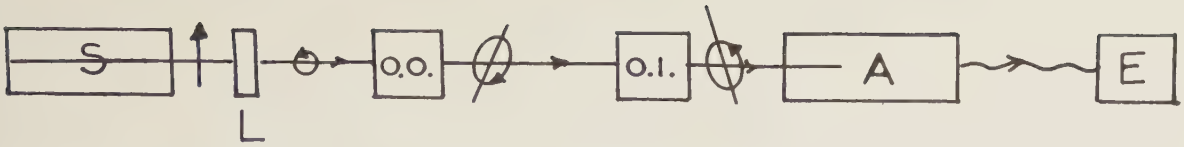


figure 70

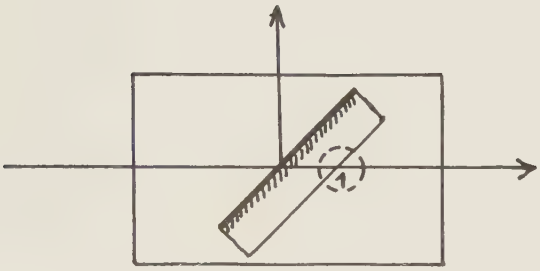


figure 71

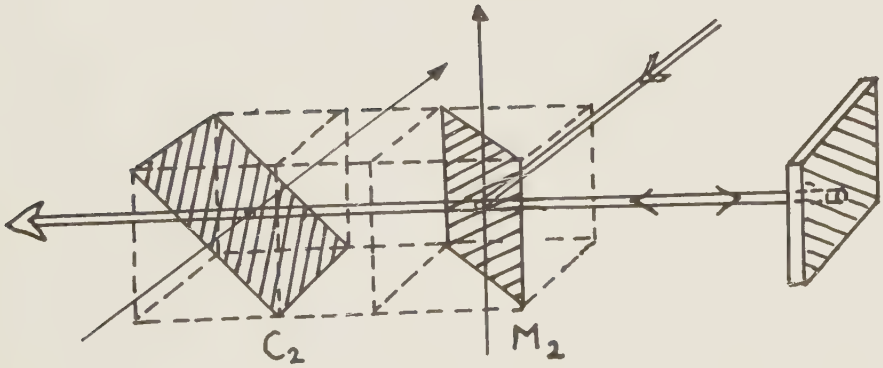


figure 72

La matrice M_2 devient :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,195 & +0,007 & +0,007 \\ -0,191 & 1,003 & +0,014 & +0,005 \\ +0,003 & +0,003 & +0,953 & +0,162 \\ +0,003 & +0,003 & -0,163 & +0,972 \end{bmatrix} \qquad (169)$$

Si on compare cette matrice à la matrice produit d'un dichroïsme suivi de biréfringence à axes confondus avec l'axe d'origine, on a :

$$D_0^{k_1 k_2} . B_0^{\varphi} = B_0^{\varphi} . D_0^{k_1 k_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_1-k_2 & 0 & 0 \\ k_1-k_2 & k_1+k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\varphi\sqrt{k_1 k_2} & -2\sin\varphi\sqrt{k_1 k_2} \\ 0 & 0 & 2\sin\varphi\sqrt{k_1 k_2} & 2\cos\varphi\sqrt{k_1 k_2} \end{bmatrix}$$

(170)

On peut en déduire par isomorphisme et en posant $k_2=1$, à une densité d près :

$$\begin{aligned} k_2 &= 1,000 \\ k_1 &= 0,676 \\ \varphi &= -\ 9°30' \end{aligned} \qquad (171)$$

La lame M_2 est donc bien un produit de ces deux opérateurs.

La précision sur les termes de la matrice est de l'ordre de 1%.

La matrice de C_2 est telle que $M_2 C_2 = dI$ soit en multipliant par M_2^{-1}, $M_2^{-1} . M_2 C_2 = M_2^{-1} . dI$

$$C_2 = d\, M_2^{-1} \qquad (172)$$

.../

Le calcul de la matrice inverse de M_2 donne, après normalisation pour que $\alpha_{11} = 1$,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,193 & 0 & 0 \\ 0,193 & 1,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,970 & -0,163 \\ 0 & 0 & 0,163 & 0,970 \end{bmatrix} \qquad (173)$$

On retrouve une matrice de la même forme que la matrice (170) donc, à une densité près, l'opérateur C_2 est un produit de dichroïsme et de biréfringence dont on peut calculer les valeurs par isomorphisme.

En posant $k_1 = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1,000 \\ k_2 &= 0,676 \\ \varphi &= +\ 9°30' \end{aligned} \qquad (174)$$

Si on compare ces valeurs aux valeurs du tableau (171) on voit tout de suite que le dichroïsme est la biréfringence de C_2 sont les mêmes que le dichroïsme et la biréfringence de M_2, mais que les axes sont croisés.

La compensatrice C_2 est donc une lame semi-transparente identique à la lame M_2 mais dont les axes sont croisés comme sur la figure (72).

Mais il est quasi impossible de réaliser du point de vue polarimètrique deux lames rigoureusement identiques.

Nous avons pris pour faire les lames M_2 et C_2 deux disques de verre issus de la même fonte de verre et nous les avons

.../

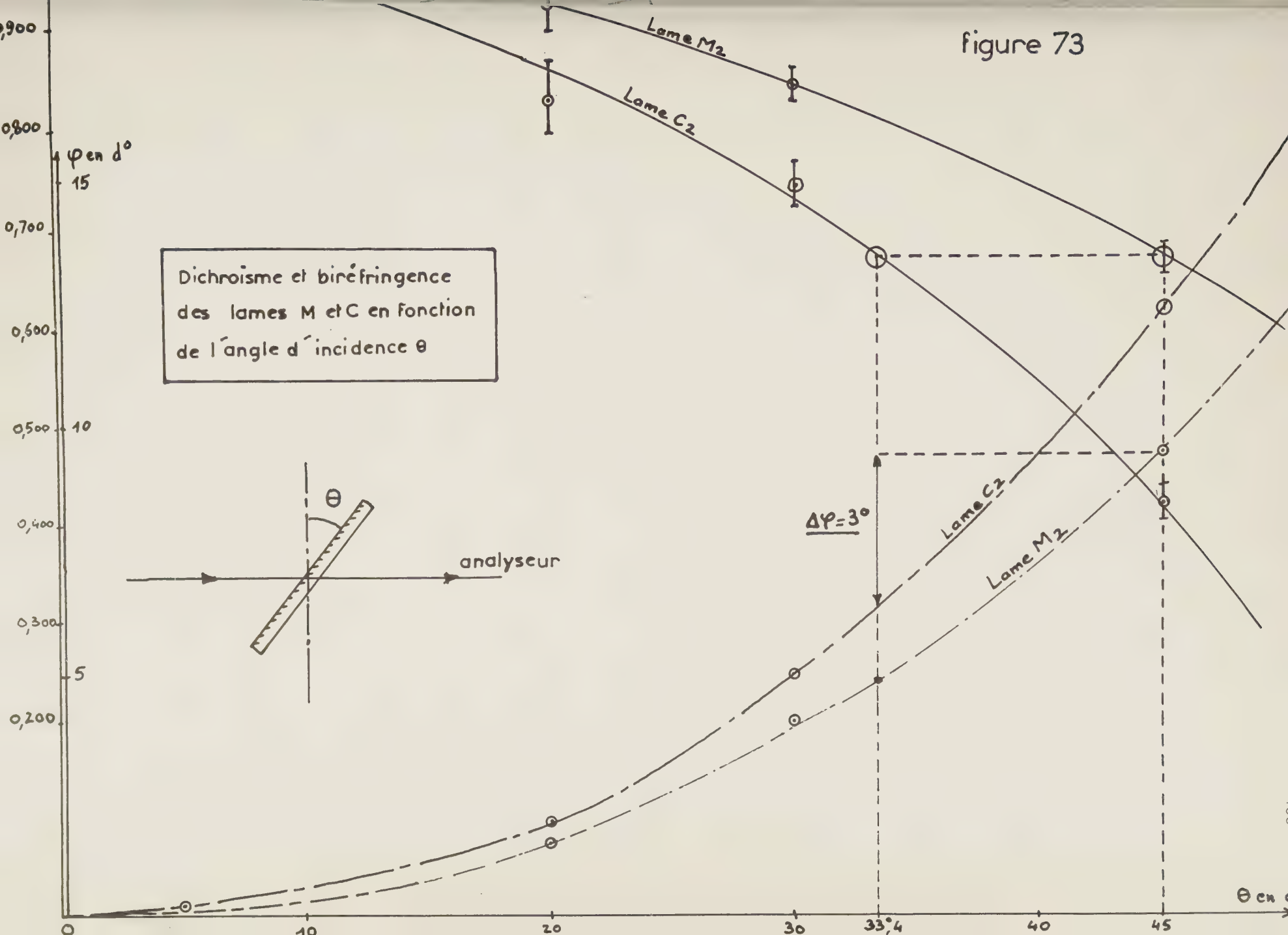


figure 73
Dichroïsme et biréfringence des lames M et C en fonction de l'angle d'incidence θ
Lame M2
Lame C2
Lame C2
Lame M2
ΔΦ=3°
φ en d°
θ
analyseur
0,900
0,800
0,700
0,600
0,500
0,400
0,300
0,200
15
10
5
0
10
20
30
33°,4
40
45
θ en

fait traiter en même temps sous la cloche à vide.

Les valeurs de la lame M_2 pour une incidence de 45° sont données au tableau (171). La lame C_2 est caractérisée, dans les mêmes conditions, par les valeurs suivantes, les axes étant croisés :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1{,}000 \\ k_2 &= 0{,}424 \\ \varphi &= +\ 12°30' \end{aligned} \qquad (175)$$

Pour que la lame C_2 puisse servir de compensatrice à la lame M_2, il faut donc diminuer son dichroïsme et sa biréfringence. Il y a un moyen très simple de la faire, c'est de diminuer l'angle d'incidence de la lame C_2 sans changer la position des axes de rotation.

Pour mieux comprendre le phénomène, nous avons fait l'étude des opérateurs de Mueller des lames M_2 et C_2 en fonction de l'angle d'incidence θ.

De ces opérateurs on a déduit les variations en fonction de θ des rapports $\frac{k_2}{k_1}$ qui représente le dichroïsme, et du déphasage φ.

Les résultats sont reportés sur la figure (73).

On constate que le dichroïsme varie comme $\cos\theta$ et que la phase varie comme θ^2. Ce sont des résultats que l'on peut retrouver théoriquement en utilisant les équations de Maxwell.

On voit sur la figure (73) que pour annuler avec C_2 le dichroïsme de M_2, il faut que l'angle d'incidence de la lame C_2 soit de 33°4. Le déphasage résiduel $\Delta\varphi$ introduit, l'ensemble des deux lames est alors de 3°0. Pour avoir un opérateur densité, il faut donc rajouter après les deux lames un petit biréfringent de déphasage 3°, à axes croisés du déphasage résiduel.

.../

L'opérateur unité est donc composé d'une cuve à faces transparentes non biréfringentes en plexiglas pleine de liquide d'indice dans lequel sont immergés les deux lames semi-transparentes et le petit biréfringent à 3°. (voir photo 14).

Une fois l'opérateur réalisé, on a vérifié par diverses polarisations que la forme de lumière transmise était bien identique à la forme de lumière incidente. Cela s'est avéré exact avec une erreur inférieure à 0,5%.

Un banc selon le schéma de la figure 69 a alors été réalisé.

V.1.4.3. Deuxième version du banc par réflexion

Mais ce banc comportait quelques inconvénients :

Le coefficient de transmission de l'optique O était très mauvais car à chaque lame semi-transparente rencontrée on perdait environ 60% du flux incident ce qui fait que le coefficient de transmission de l'opérateur unité était $(0,4)^3 = 6$ %.

Le coefficient de reflexion -transmission du modèle M était de l'ordre de 50%, ce qui fait qu'il restait 3% de la lumière incidente environ qui arrivait sur l'analyseur.

De plus, le banc était peu maniable à cause du liquide d'indice qui risquait de fuir et de réglages difficiles à faire.

On a donc essayé de remplacer l'opérateur unité par un élément plus simple.

.../

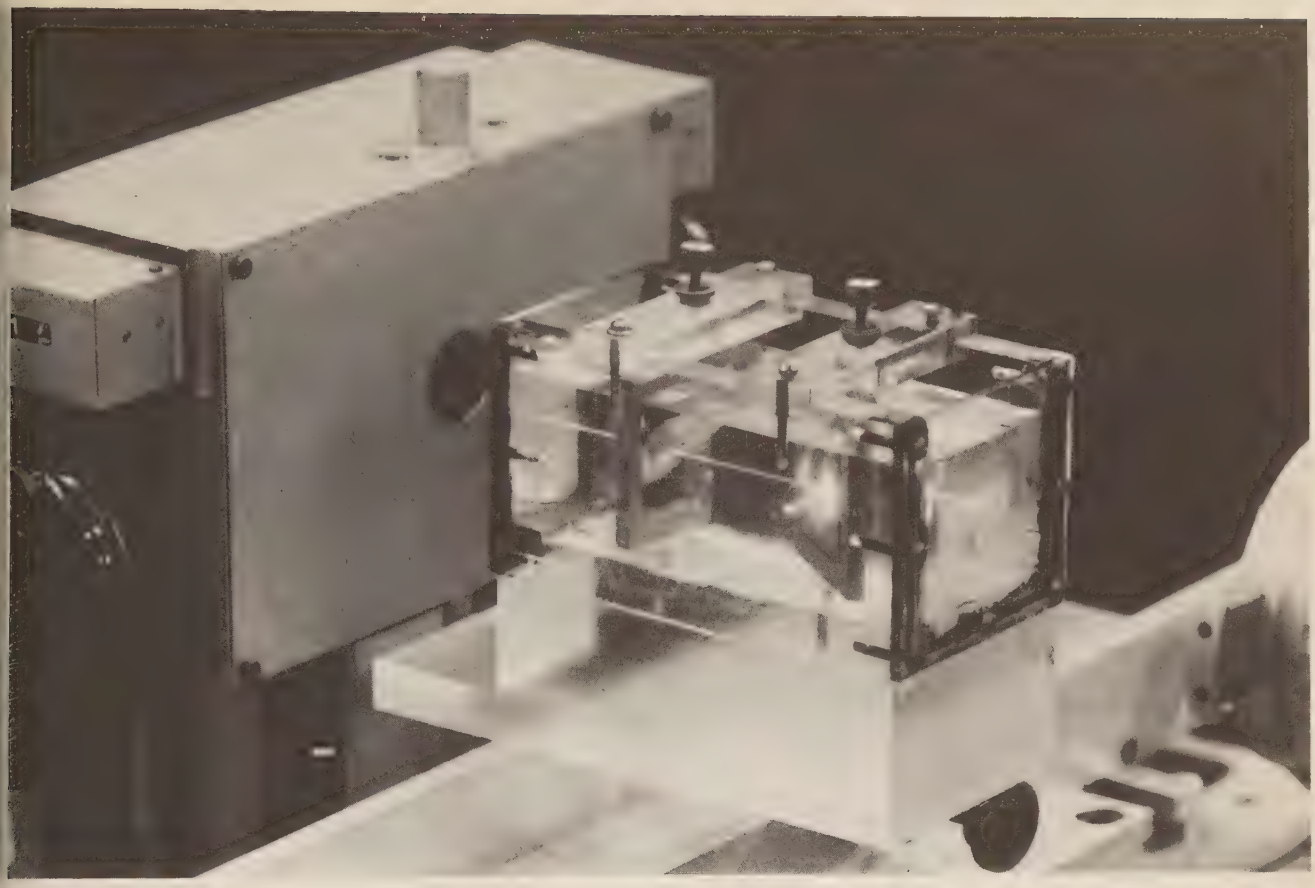


Photo 14

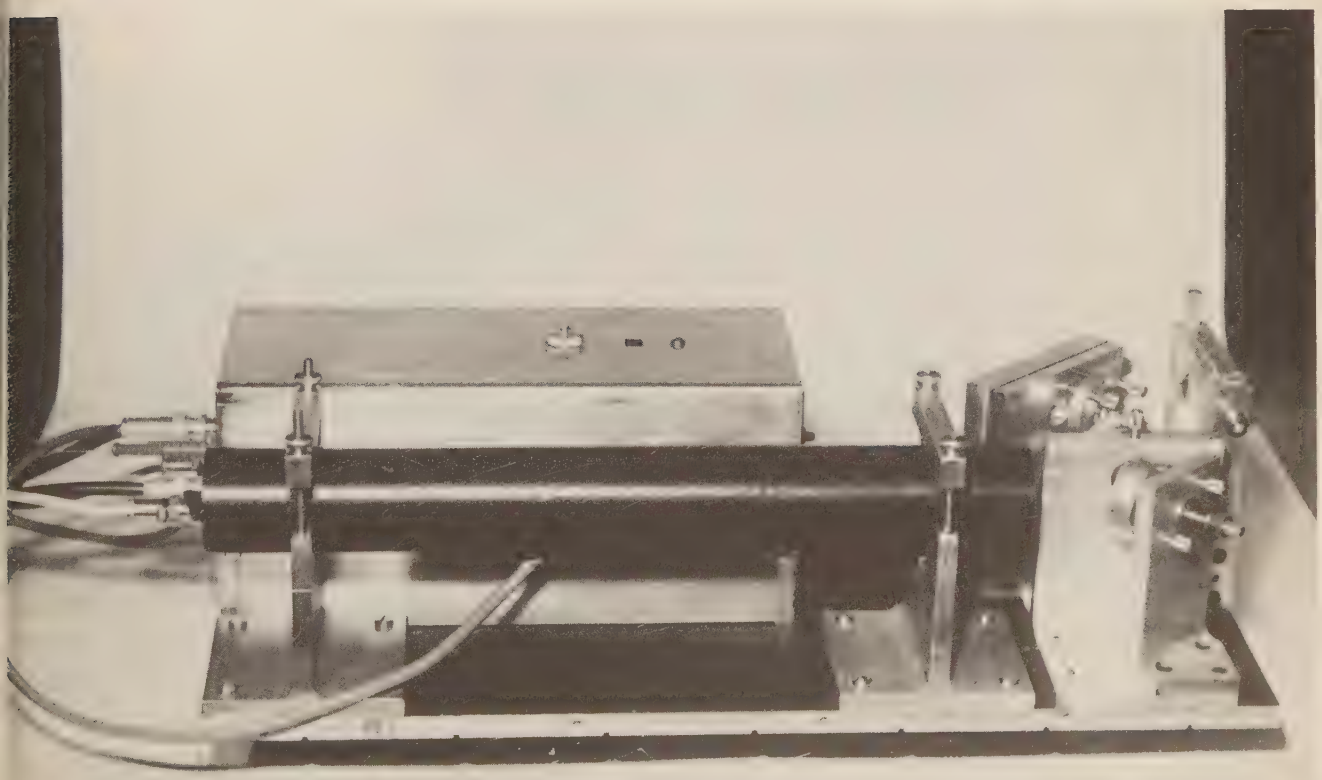


Photo 15

Pour cela on a remplacé le montage de la figure 69 par le montage de la figure 74, et l'on a regardé quelle était la réponse de l'appareil a un biréfringent connu en fonction de l'angle β.

On a trouvé que la réponse variant en $(1-\frac{\beta^2}{2})$, ce qui est normal car l'erreur principale dépend de la variation d'épaisseur e traversée en fonction de l'inclinaison β, cette variation étant sinusoïdale.

Si l'on veut que l'erreur introduite par β soit inférieure au millième, il faut que l'angle β soit inférieur à 5°, et si l'on veut que cette erreur soit inférieure à 1%, il faut que β soit inférieur à 16°.

On voir donc que si l'on prend un angle de 8°, l'erreur introduite est de l'ordre de grandeur de la précision de l'analyseur A, c'est à dire 2.10^{-3}.

On a alors réalisé un banc selon le schéma de la figure 75.

La lentille L introduite sur le faisceau est exempte de biréfringence. Elle a pour objet de ramener les rayons à être parallèles à la sortie, mais surtout, elle permet d'utiliser des modèles M non plans, car comme le faisceau lumineux converge sur le modèle, la courbure introduite ne gêne pas l'optique et une légère défocalisation de M permet de faire pénétrer tout le flux incident dans l'analyseur A.

La compensatrice C_1 est réglée pour que la lumière incidente soit circulaire droite, compte tenu des deux réflexions sur les miroirs M_1 et M_2.

Ce banc, que l'on voit sur la photo 15 a permis de faire des mesures sur des maquettes en altuglas. Les résultats de ces

.../

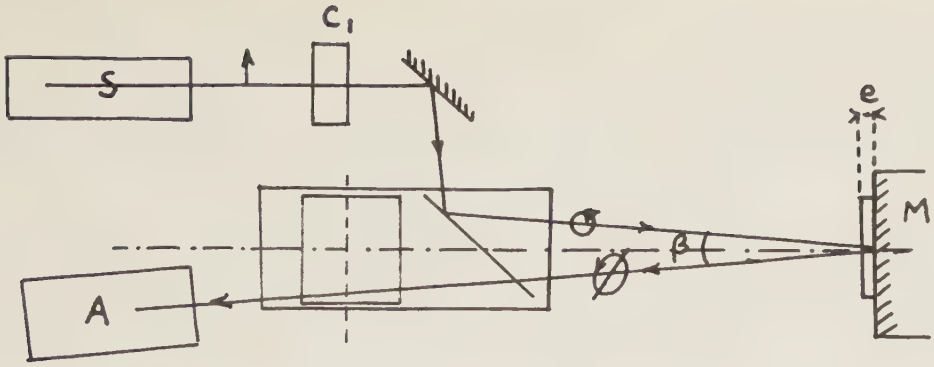


figure 74

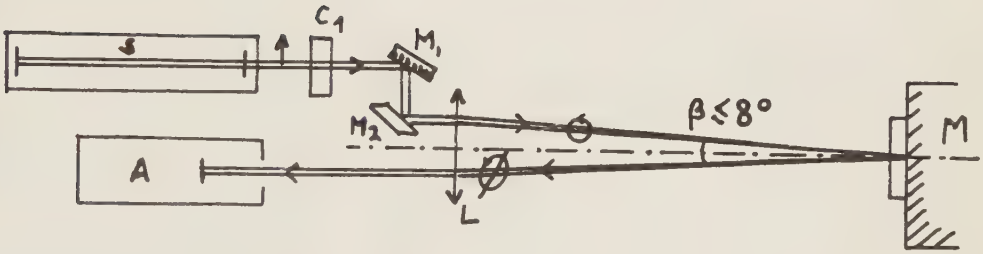


figure 75

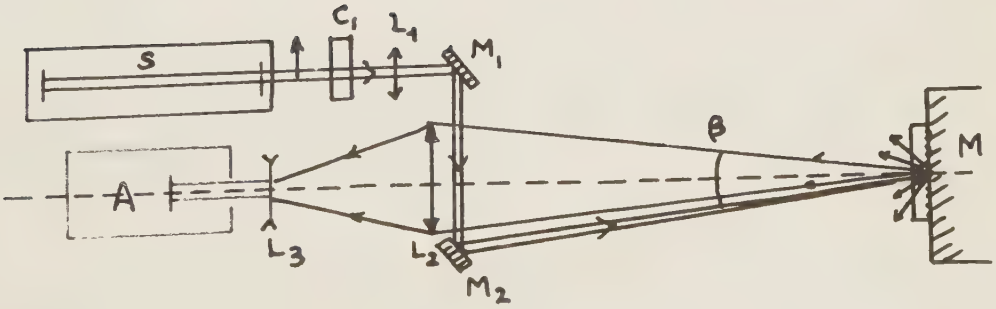


figure 76

mesures sont exposée au chapitre suivant.

C'est alors que nous sont apparues les difficultés de réalisation des maquettes en métal dont on a parlé au paragraphe V.1.3. Pour remédier à ces difficultés, nous avons décidé d'utiliser la réflexion diffuse au lieu de la réflexion pure.

V.1.4.4. Troisième version du banc par réflexion

Il a donc fallu changer une fois encore le montage optique du banc. C'est le schéma de la figure 76 qui nous a semblé présenter le plus d'intérêts.

Les lentilles L_1, L_2, L_3 sont sans biréfringence. Pour cela il faut les choisir dans un verre bien recuit et les traiter anti-reflet pour la longueur d'onde du laser.

La lentille L_1 a une focale telle que le faisceau laser focalise en M.

L'ouverture numérique de la lentille L_2 définit l'angle β, donc l'erreur sur la mesure, que l'on se donne pour ce banc égale à 1%.

L'angle β fait 15°. La lentille est donc au plus ouverte à f/3,8. Nous avons pris une lentille ouverte à f/4 son diamètre est 45 mm et sa focale 180 mm.

En admettant que l'albedo de la couche diffusante soit de 0,5 et que la diffusion soit orthotrope, le flux qui rentre dans l'analyseur A est, en rappelant φ_0 le flux incident.

$$\varphi = 0{,}5.\ \frac{\Omega}{2\pi}\ .\ \varphi_0 = \varphi_0.\ 0{,}5.\ (1 - \cos\beta)$$

$$\varphi = 0{,}015.\ \varphi_0 \qquad (176)$$

.../

V.2. Caractéristiques de l'appareil

Le photoélasticimètre par réflexion diffuse est représenté sur la photo 16. Nous allons évaluer les caractéristiques principales de cet appareil.

V.2.1. Bilan énergétique

La source S est un laser de 1 mw émettant sur la longueur d'onde 6328 Å. Le nombre de photons N émis par cette source en une seconde est :

$N = U/h\nu$ donc

$N = 3,2\ 10^{15}$ Photons/S

Le coefficient de transmission de l'ensemble C_1, L_1, M_1, M_2 est estimé à 0,72. Le coefficient de transmission de L_2 et L_3 est estimé à 0,93, ce qui fait que le montage optique a un coefficient de transmission total de 0,015. 0,72. 0,93 = 0,010

1% du flux du laser rentre dans l'analyseur soit

$N' \simeq 3.10^{13}$ Photons /S

Le coefficient de transmission moyen du polaroïd tournant est $\tau = 0,31$

Le nombre de photons arrivant sur la photocathode du PM est donc :

$N'' \simeq 10^{13}$ Photons /S

Le photomultiplicateur utilisé dans le montage est un modèle IP 21 de la Radio Corporation of America.

.../

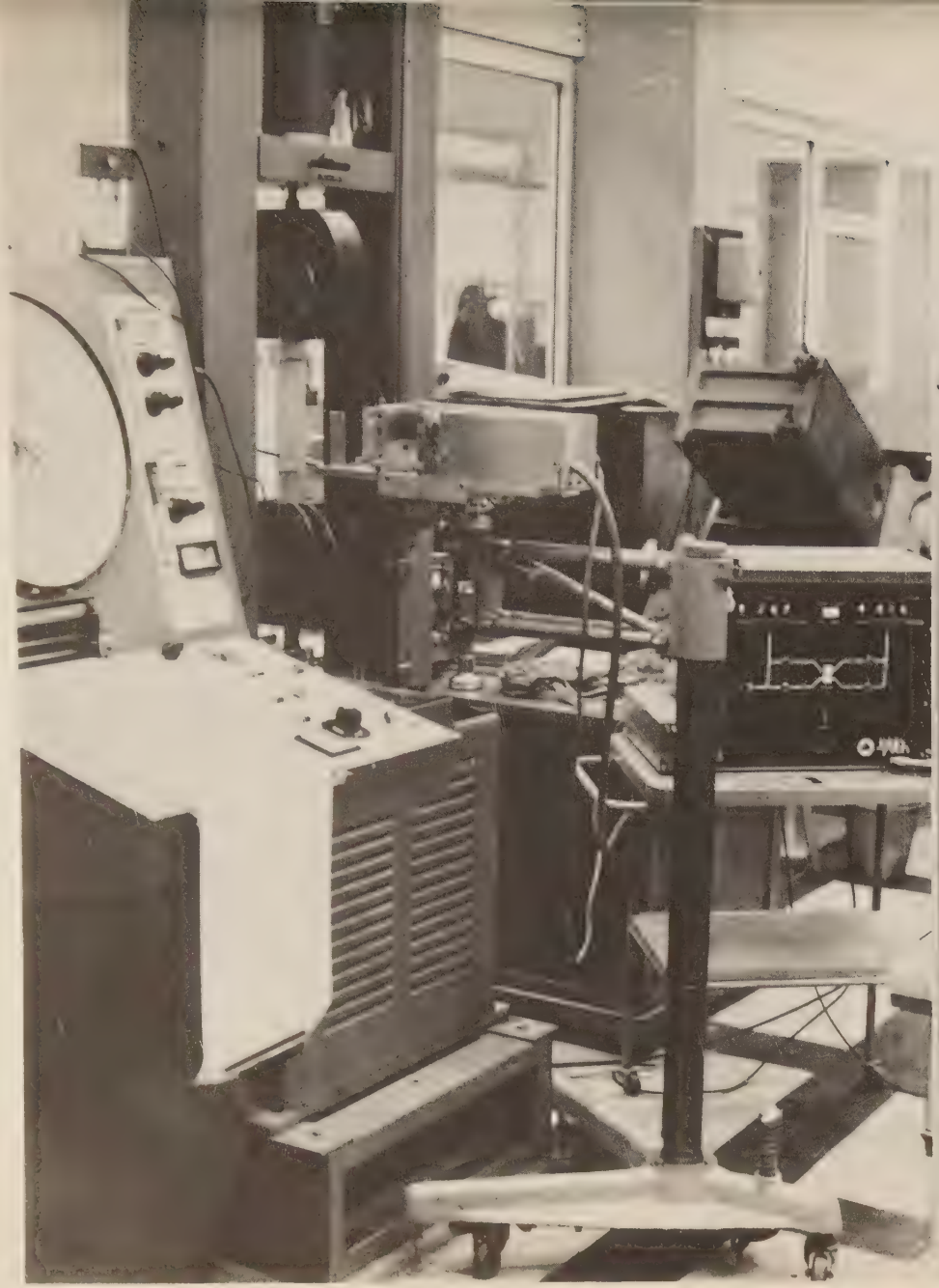


Photo 17

Photo 16

Il est muni d'une photocathode à fil du type S4 dont le rendement quantique ρ à 0,6328 μ est :

$$\rho = 2,2\ \%$$

La tension d'alimentation moyenne du photomultiplicateur est de l'ordre de 900 Volts, ce qui donne un coefficient d'amplification g de 6.10^5. Il en résulte un courant d'anode de 21 mA en moyenne.

Ce courant passe dans une résistance de charge de 3,33 KΩ ce qui donne une différence de potentiel de 0,7 V. Un amplificateur ayant un gain de 14,25 la transforme en une différence de potentiel de 10 V.

Tout le reste de l'électronique est réglé sur cette valeur moyenne de 10 V.

L'asservissement fait varier la tension d'alimentation du photomultiplicateur entre 700 et 1000 V, ce qui fait que son gain varie entre 10^5 et 10^6. Le flux incident peut donc varier d'un rapport 10, la mesure reste correcte, par compensation automatique.

V.2.2. Pouvoir séparateur spatial

La dimension de la tache image sur l'objet à analyser est telle que les mesures sont faisables tous les 0,1 mm, et ceci dans toutes les directions. Pour cela, l'appareil est monté sur un pied stable que l'on voit sur la photo 16, où des commandes ad hoc en X et Y sont montées.

C'est donc l'appareil de mesure qui se déplace, la maquette à analyser étant fixe.

.../

Cependant, au voisinage d'un bord d'échantillon, la diffraction empêche que l'on s'approche du bord de moins de 0,4 mm.

Ceci est vrai pour des vernis dont l'épaisseur est inférieure à 0,5 mm.

Pour des vernis épais, la précision spatiale est 0,2 mm.

L'appareil étant destiné a être utilisé avec des vernis minces, par exemple d'épaisseur 0,25 mm, on peut dire que son pouvoir séparateur spatial est 0,1 mm.

V.2.3. Sensibilité en déphasage φ

On a vu que l'appareil introduit une erreur sur la mesure de 1% due au fait que l'on attaque l'échantillon avec un angle d'incidence non nul. Une autre cause d'erreur possible serait que l'échantillon ne soit pas placé orthogonalement à l'axe optique de l'appareil. (voir figure 77)

Pour que cette erreur soit inférieure au millième, il suffit, pour les mêmes raisons, que l'angle γ soit inférieur à 5°.

Ce réglage est très facile car on a placé symètriquement au miroir M_2 par rapport à l'axe optique du système un petit écran E. Quand le faisceau réfléchi par la première face du vernis photoélastique aboutit sur l'écran E, on est sûr que l'angle γ est inférieur à 2°, et ceci dans les deux directions horizontale et verticale.

L'analyseur de formes introduit une erreur absolue toujours inférieure à 1% quelque soit la forme analysée.

La formule (159) peut s'écrire :

$$n_1 - n_2 = K\,(\sigma_1 - \sigma_2)$$

.../

On veut mesurer $(n_1 - n_2)\, e = K' (\sigma_1 - \sigma_2)$ (177)

L'erreur sur la mesure est :

$$\Delta (n_1 - n_2)\, e + (n_1 - n_2)\, \Delta e = K' \Delta (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Le terme $\Delta (n_1 - n_2)$ est nul. Il reste donc :

$$(n_1 - n_2)\, \Delta e = K' \Delta (\sigma_1 - \sigma_2) \qquad (178)$$

soit $$\frac{\Delta (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\Delta e}{e} \qquad (179)$$

On a vu que $\frac{\Delta e}{e} < 1\%$, donc $\frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} < 1\%$

A ce 1%, il faut rajouter celui de l'analyseur A.

<u>L'erreur sur la mesure d'un déphasage est donc toujours inférieure à 2 %.</u>

L'erreur sur la connaissance de $\sigma_1 - \sigma_2$ dépend de la connaissance des coefficients photoélastiques E et μ de la résine, de l'homogénéité de son indice et de la constante photoélastique K. Ces valeurs sont connues à 1% près, ce qui fait que l'erreur absolue sur $\sigma_1 - \sigma_2$ est de l'ordre de 1% + 1% + 1% + 2% = 5%

<u>L'erreur sur la mesure de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ est donc toujours inférieure à 5%</u>

Mais l'appareil est bien plus sensible à une toute petite variation de contrainte. En effet, pour ces toutes petites variations, l'épaisseur e peut être considérée comme constante et le fait que les coefficients du vernis photoélastique soient mal connus n'intervient pas. La dérivation logarithmique de la formule (159) donne alors :

.../

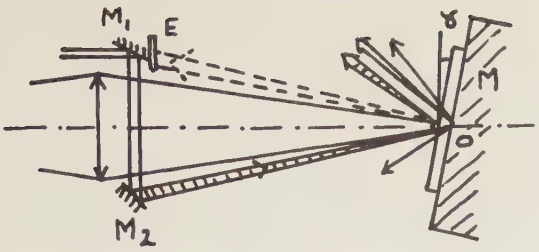


figure 77

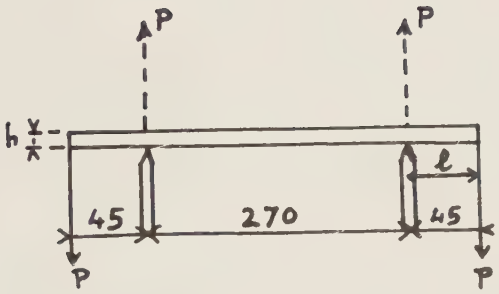


figure 79

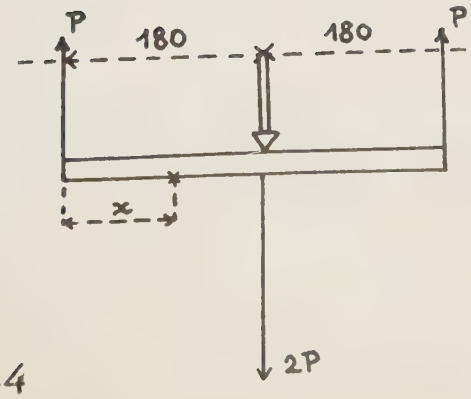


figure 84

$$\frac{d\,(n_1 - n_2)}{n_1 - n_2} = \frac{d\,(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varphi}{\varphi} \qquad (180)$$

La sensibilité de l'analyseur de forme est :

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = 10^{-3}$$

Le banc par réflexion peut donc détecter des variations de contraintes de $\frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = 10^{-3}$

Si l'on est en présence d'une contrainte introduisant un déphasage de plusieurs franges, la précision est encore améliorée car dans ce cas, $\sigma_1 - \sigma_2$ est beaucoup plus grand que pour une frange.

On peut donc affirmer que dans tous les cas, <u>la sensibilité du banc par réflexion est au moins du millième de frange</u>.

Enfin, la détectivité de l'appareil est encore plus grande que cette sensibilité. En effet, détecter l'apparition de contraintes en un point signifie pour l'appareil détecter l'apparition d'un signal sinusoïdal sur le photomultiplicateur, ce signal étant à 400 Hz.

Pour faire cette détection, on branche un oscilloscope directement derrière le préamplificateur du P.M. La sensibilité de l'appareil est alors meilleure que celle du voltmètre digital et on peut détecter un signal correspondant aux dix millième de frange.

<u>La détectivité du banc par réflexion est de l'ordre du dix-millième de frange</u>.

.../

V.2.4. Résolution en direction α

La direction des contraintes, donnée par α est une information très utile, mais que l'on n'a pas besoin de connaitre avec grande précision. En effet, la connaissance des directions permet de tracer les isoclines (au lieu des points où la direction des contraintes est parallèle à une direction donnée) et les isostatiques (enveloppe des directions de contraintes principales), c'est à dire que l'on reporte toujours les directions sur un graphique. La précision n'a donc pas été spécialement recherchée.

Pour l'appareil existant, elle est de 2° pour les faibles ellipticités et de 0,5° pour les lumières de fort aplatissement.

V.2.5. Résolution temporelle

Pour que l'analyseur A ait la sensibilité requise, il est nécessaire d'intégrer la réponse pendant une centaine de tours de l'analyseur tournant, ce qui fait que la fréquence de mesure est au plus de 4 points par seconde.

En fait, pour la commodité de lecture, on intègre sur 300 tours environs et on affiche le résultat sur les voltmètres digitaux toutes les secondes.

La conception de l'appareil actuel ne permet donc pas de faire des mesures sur des modèles non figés.

V.2.6. Remarque

Les caractéristiques de l'appareil par réflexion pure sont identiques à celles de l'appareil par réflexion diffuse. La seule différence est le nombre de photons arrivant sur l'analyseur A qui est plus grand dans le cas de la réflexion pure que dans le cas de la réflexion diffuse.

Les gains des amplificateurs sont donc légèrement différents

.../

V.3. Essais et résultats

V.3.1. Appareil à réflexion pure

L'essai est effectué avec l'appareil représenté figure 75. La manipulation consiste à mesurer la biréfringence crée dans une plaque plane en "altuglass" soumise à une traction pure et présentant un trou central circulaire. Les dimensions de cette plaque sont données sur la figure 78.

La figure 78 donne les résultats de mesures effectuées suivant les deux axes de symétrie de la plaque. On trouve sur cette même figure les valeurs du déphasage mesuré sur le banc de photoélasticimètrie par transmission directe. Nous pouvons remarquer que dans le cas de l'essai par transmission le faisceau lumineux traverse une fois l'épaisseur de l'éprouvette, alors que dans le cas de l'essai par réflexion il la traverse deux fois. Pour faciliter la comparaison nous avons également porté sur cette figure les valeurs 2 φ (φ étant la valeur du déphasage par transmission).

On remarque la parfaite concordance des deux mesures. De plus les résultats sont conformes à 2% près aux résultats prédits par la théorie de l'élasticité (travaux du professeur Kirsch). Notamment on retrouve bien le rapport 3 entre le déphasage au point A et au point B.

V.3.2. Appareil à réflexion diffuse

L'appareil utilisé est représenté sur la figure 76.

Au cours des essais qui vont suivre on s'est attaché à vérifier que les lois de variation des biréfringences en fonction des chargements sont isomorphes aux lois de variation des contraintes en fonction des mêmes chargements. Cependant, dans un certain nombre de cas, on a pu comparer les valeurs des contraintes mesurées avec cette méthode, aux valeurs données par la théorie.

.../

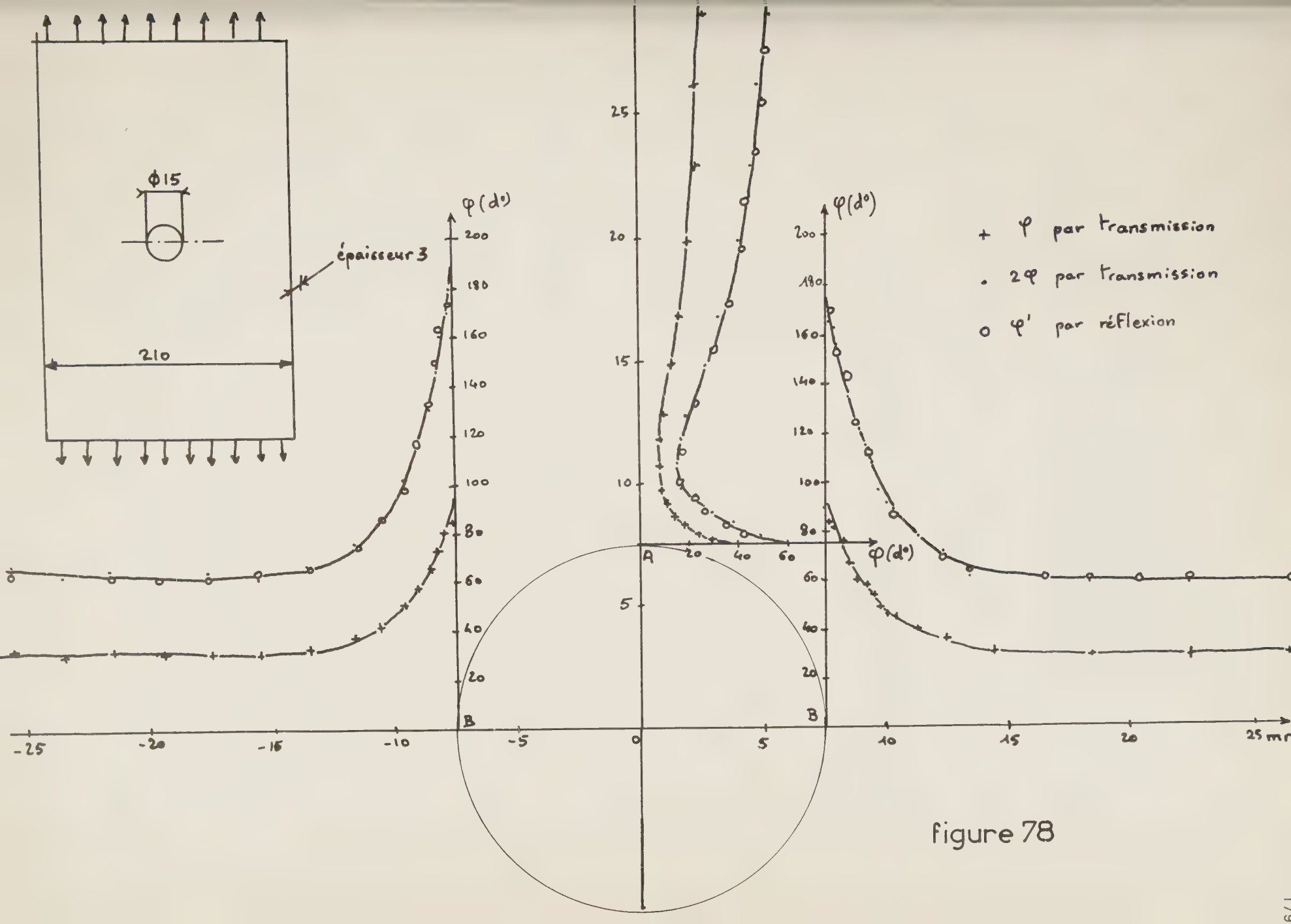

Φ15
épaisseur 3
210
φ(d°)
+ φ par transmission
• 2φ par transmission
o φ' par réflexion
A
B
φ(d°)
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25 mm

figure 78

V.3.2.1. Etude de la flexion circulaire

L'essai consiste à soumettre une plaque à une flexion c culaire suivant le procédé indiqué par la figure 79.

On cherche à vérifier que la courbe donnant le déphasage en fonction de la charge P est une droite.

En effet, la théorie de l'élasticité donne dans le cas de flexion la valeur des contraintes à la surface de la plaque :

$$\sigma = \frac{Mv}{I} \qquad (181)$$

où M est le moment de flexion, I est le moment d'inertie et v est la demi-épaisseur.

Dans notre cas, $M = P \times \ell$

$$I = \frac{b\,h^3}{12}$$

(b étant la largeur de la plaque) et

$$v = h/2$$

donc :

$$\sigma = \frac{6\ell}{h^2 b}\,P = K.P \qquad (182)$$

La formule (182) montre bien que σ est une fonction linéaire de P.

Les valeurs du déphasage φ en fonction de la charge P sont portées sur les figures 80, 81, 82 et 83.

Une première série d'essais a été effectuée avec une plaque en AU 4G sur laquelle on a collé un vernis épais(voir figures 80, 81 et 82).

.../

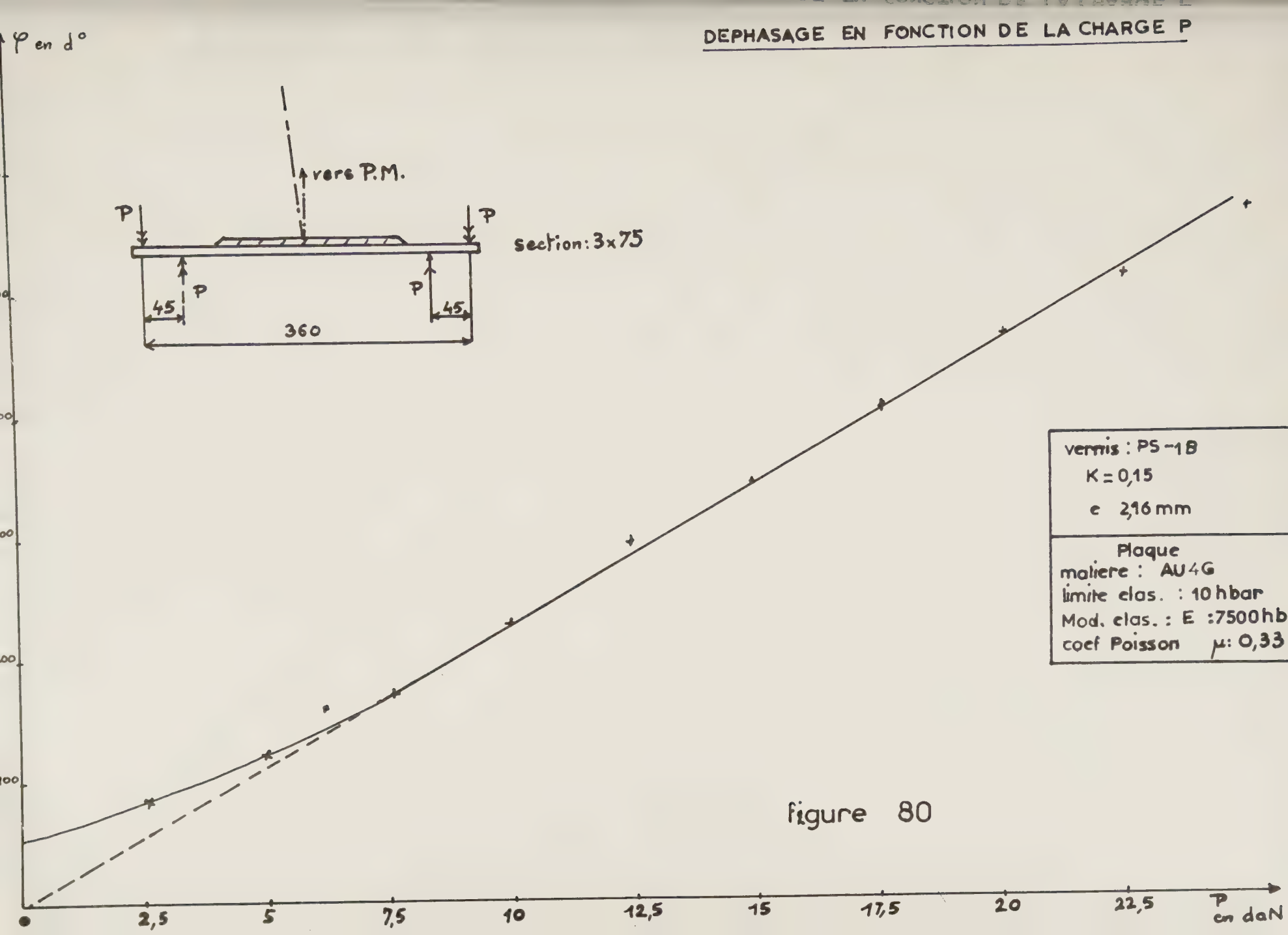

DEPHASAGE EN FONCTION DE LA CHARGE P
φ en d°
vers P.M.
P
P
P
P
45
45
360
section: 3x75
vernis : PS-1B
K = 0,15
e 2,16 mm
Plaque
matiere : AU4G
limite elas. : 10 hbar
Mod. elas. : E :7500 hb
coef Poisson μ: 0,33
0
2,5
5
7,5
10
12,5
15
17,5
20
22,5
P
en daN

figure 80

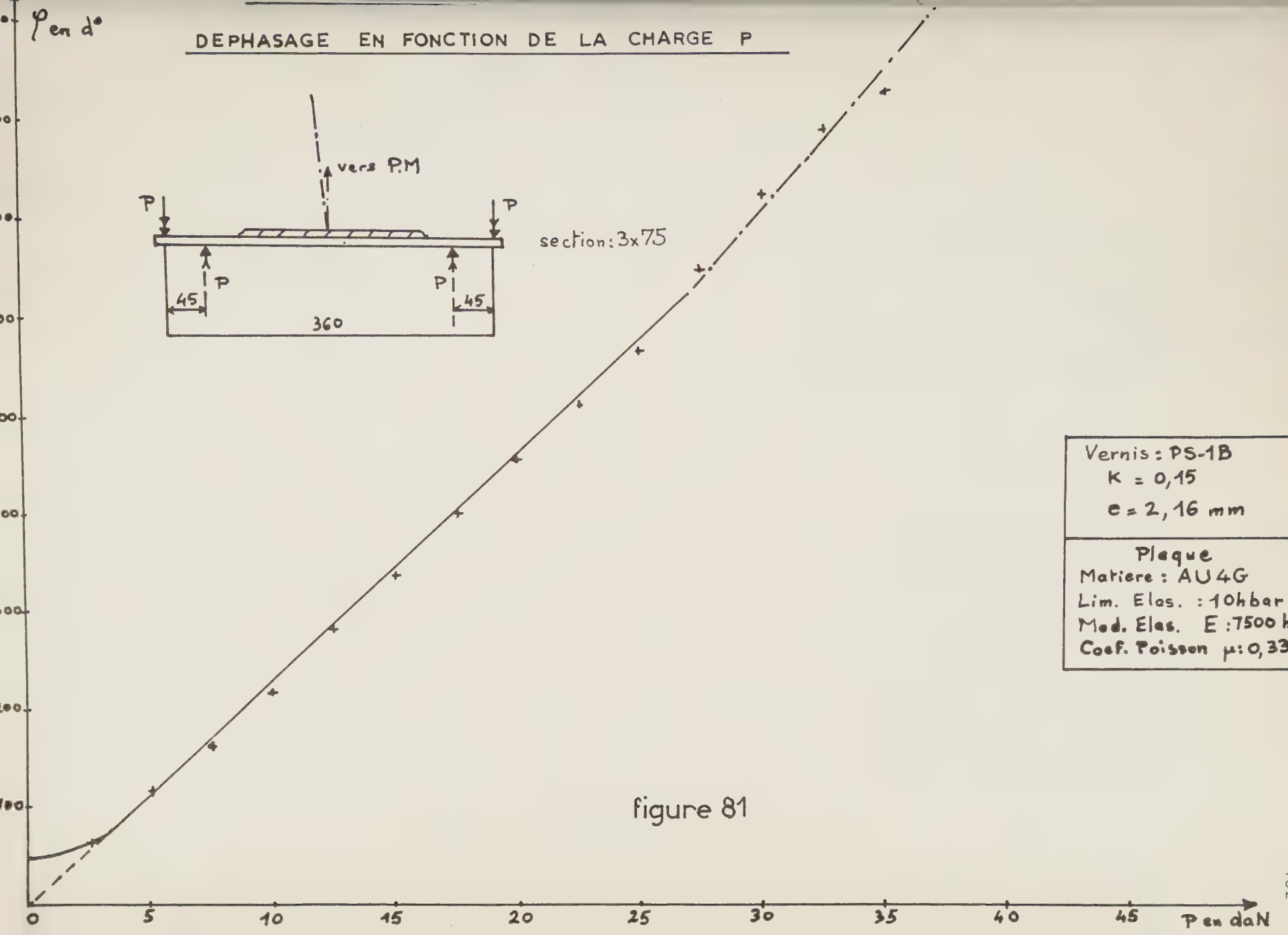

DEPHASAGE EN FONCTION DE LA CHARGE P
φ en d°
vers P.M
P
P
P
P
45
45
360
section: 3x75
Vernis : PS-1B
K = 0,15
e = 2,16 mm
Plaque
Matiere : AU4G
Lim. Elas. : 10hbar
Mod. Elas. E : 7500 h
Coef. Poisson μ: 0,33
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
P en daN

figure 81

DEPHASAGE EN FONCTION DE LA CHARGE P

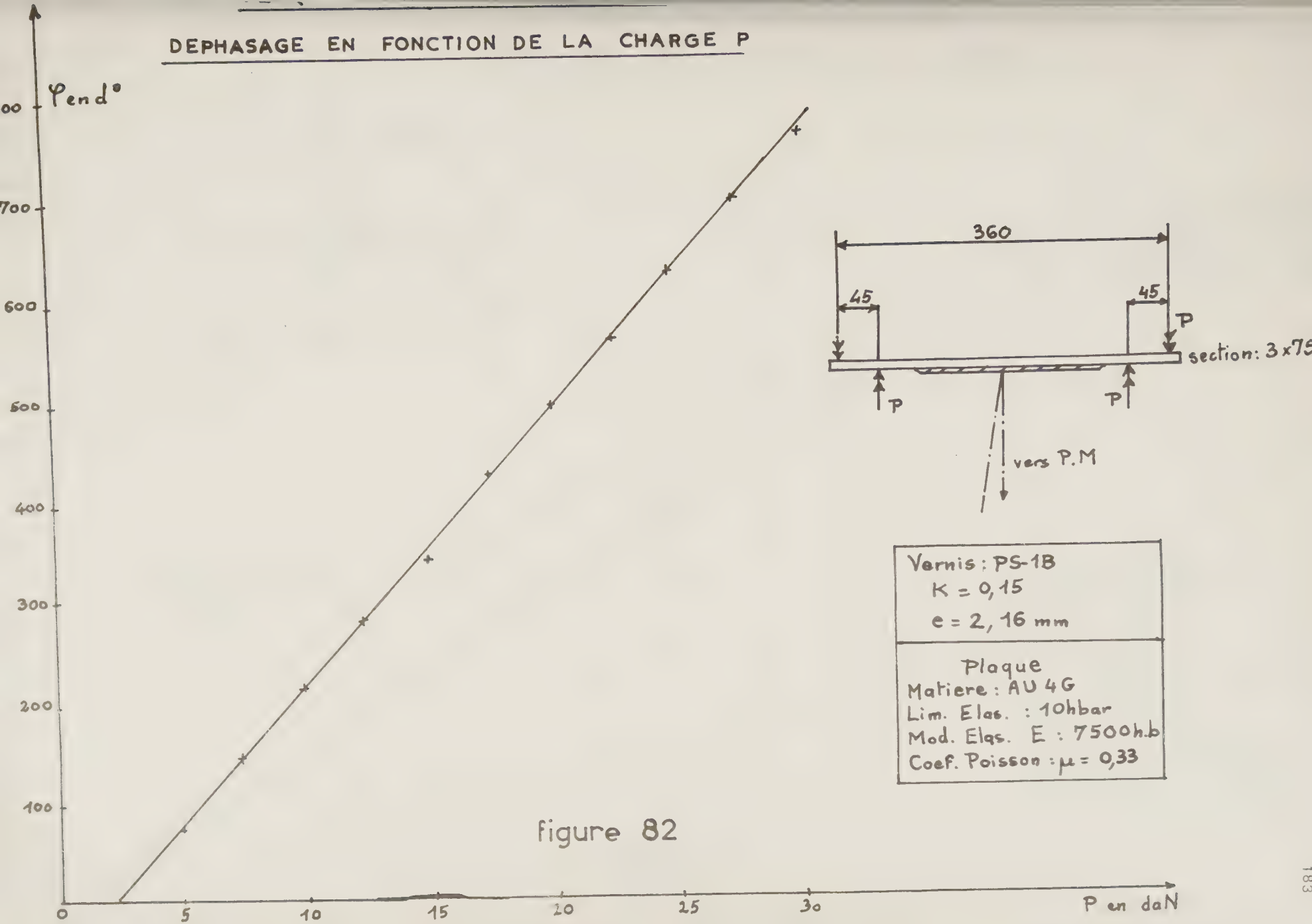


figure 82

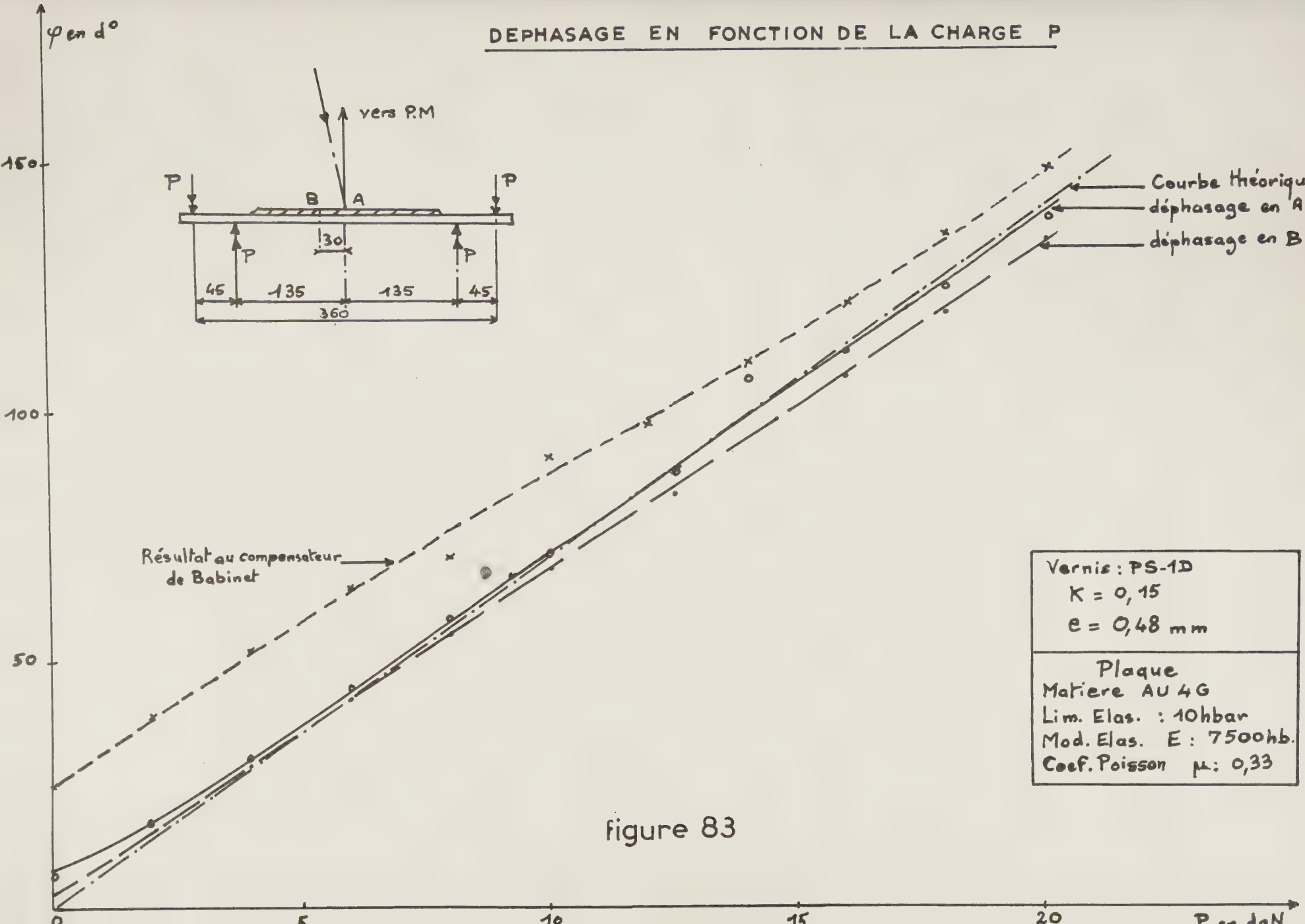

DEPHASAGE EN FONCTION DE LA CHARGE P
φ en d°
150
100
50
0
5
10
15
20
P en daN
vers P.M
P
B
A
30
45
135
135
45
360
Courbe théorique
déphasage en A
déphasage en B
Résultat au compensateur de Babinet
Vernis : PS-1D
K = 0,15
e = 0,48 mm
Plaque
Matiere AU 4G
Lim. Elas. : 10hbar
Mod. Elas. E : 7500hb.
Coef. Poisson μ : 0,33

figure 83

Les figures 80 et 81 correspondent à deux essais successifs pendant lesquels le vernis subit une extension. La figure 82 correspond au cas d'une compression.

Un autre essai consiste à étudier dans les mêmes conditions une plaque similaire sur laquelle on a collé un vernis plus fin (voir figure 83).

Sur ces différents essais nous pouvons faire les remarques suivantes :

- les contraintes résiduelles n'interviennent que pour les faibles charges
- la variation de la biréfringence en fonction de la charge est bien linéaire

De plus, dans le cas représenté figure 81, pour une charge supérieure à 30 daN la variation du déphasage ne présente plus la même linéarité en fonction de la charge ce qui s'explique par le fait que l'on a dépassé la zone d'élasticité.

La figure 83 met en évidence les améliorations apportées aux anciennes méthodes de mesure et la bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux.

V.3.2.2. Etude d'une plaque sur deux appuis avec une charge au centre

On cherche dans les conditions représentées sur la figure 84 à vérifier les lois donnant le déphasage en fonction du point d'observation et de la charge.

.../

La théorie de l'élasticité donne pour valeur de la contrainte σ à la surface de la plaque :

$$\sigma\ (x) = \frac{M(x)\ v}{I} \qquad (183)$$

avec $M(x) = P \times x$ (184)

d'où : $$\sigma(x) = \frac{6P}{bh^2}\ x \qquad (185)$$

La formule (185) montre qu'on doit obtenir un faisceau de droites $\sigma(x)$ en fonction de P.

Les résultats sont portés sur la figure 85.

Cette dernière met bien en évidence la linéarité de la loi reliant le déphasage à l'abscisse du point d'observation pour une charge donnée.

Pour les faibles charges nous remarquons à nouveau l'influence des contraintes résiduelles.

V.3.2.3. Essais en traction pure :

Les deux essais suivants ont pu être réalisés en utilisant une machine de traction mise à notre disposition par le Laboratoire de Résistance des Matériaux du STCAN PARIS (voir photo 17).

Sur la figure 86 nous avons porté les résultats expérimentaux de la mesure du déphasage en fonction de la contrainte de traction appliquée. Sur la même figure nous avons tracé également la courbe théorique et le relevé au compensateur de Babinet.

Les écarts entre les déphasages théoriques et pratiques peuvent s'expliquer par le fait que la valeur du module d'élasticité adoptée est vraisemblablement supérieure à la valeur réelle.

.../

DEPHASAGE EN FONCTION DE LA CHARGE F LE LONG DE LA PLAQUE

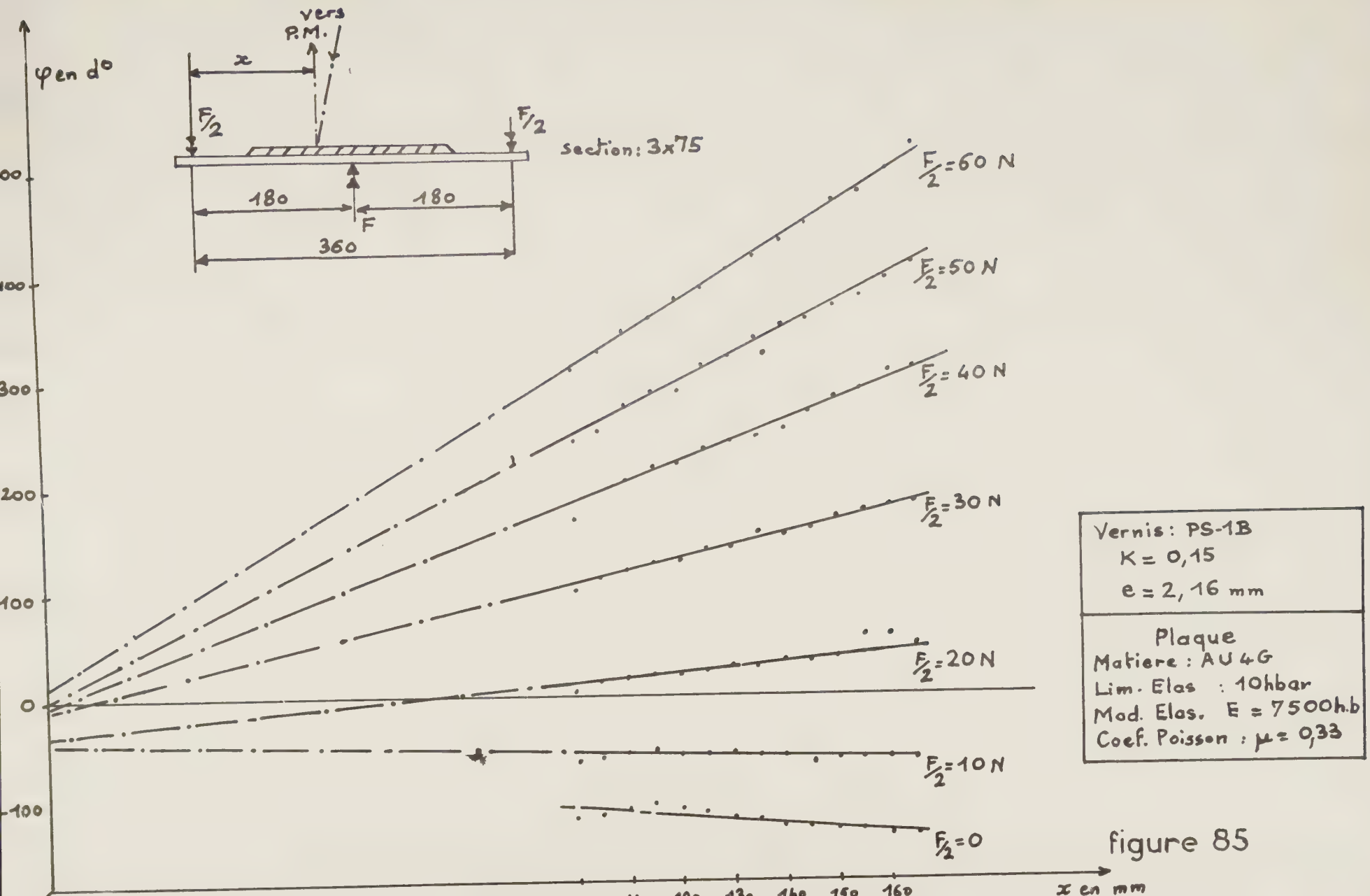


figure 85

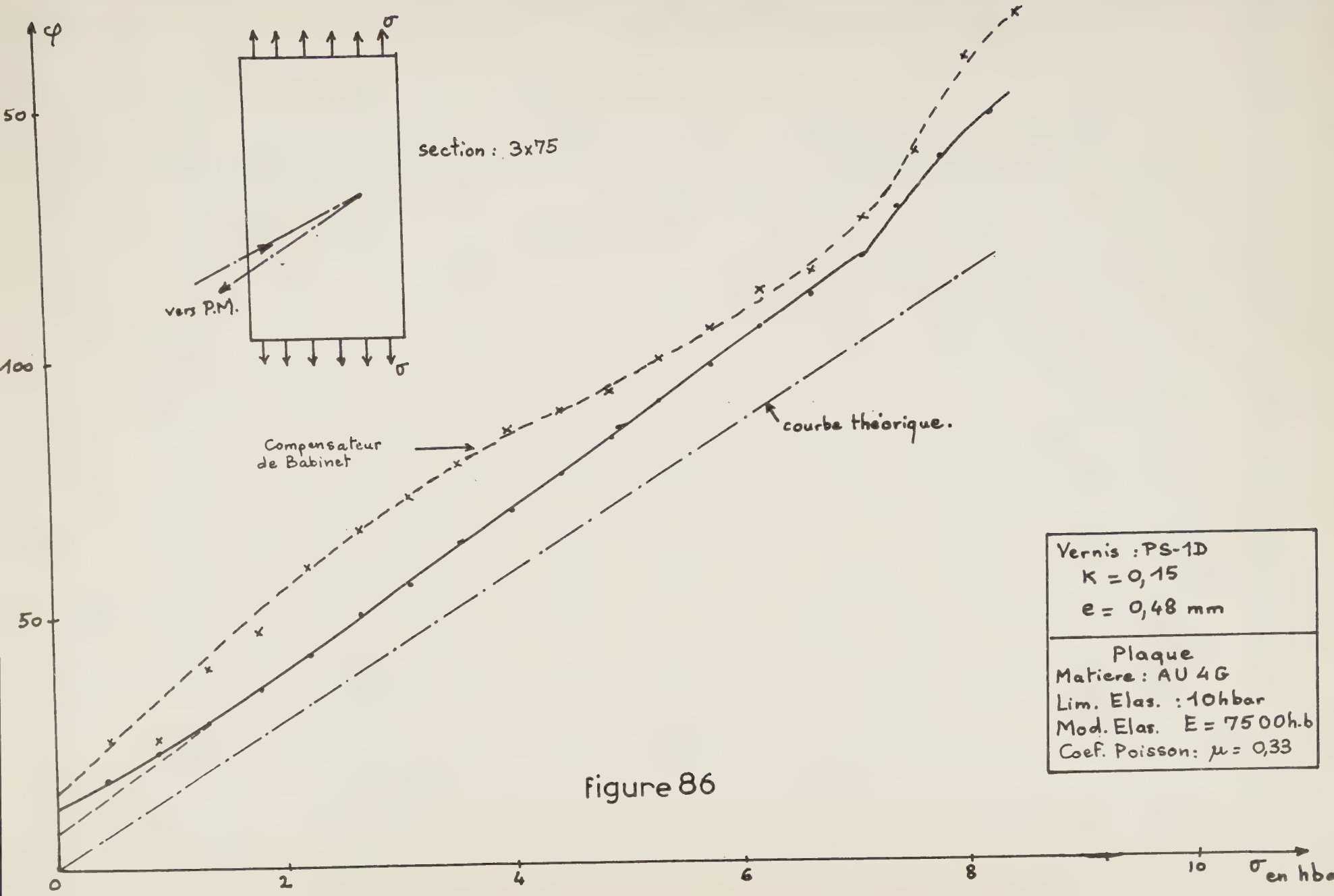

φ
50
100
50
0
2
4
6
8
10
σ en hbar
σ
σ
section : 3x75
vers P.M.
Compensateur de Babinet
courbe théorique.
Vernis : PS-1D
K = 0,15
e = 0,48 mm
Plaque
Matiere : AU 4G
Lim. Elas. : 10hbar
Mod. Elas. E = 7500h.b
Coef. Poisson: μ = 0,33

figure 86

PLAQUE AVEC UN TROU CENTRAL EN TRACTION

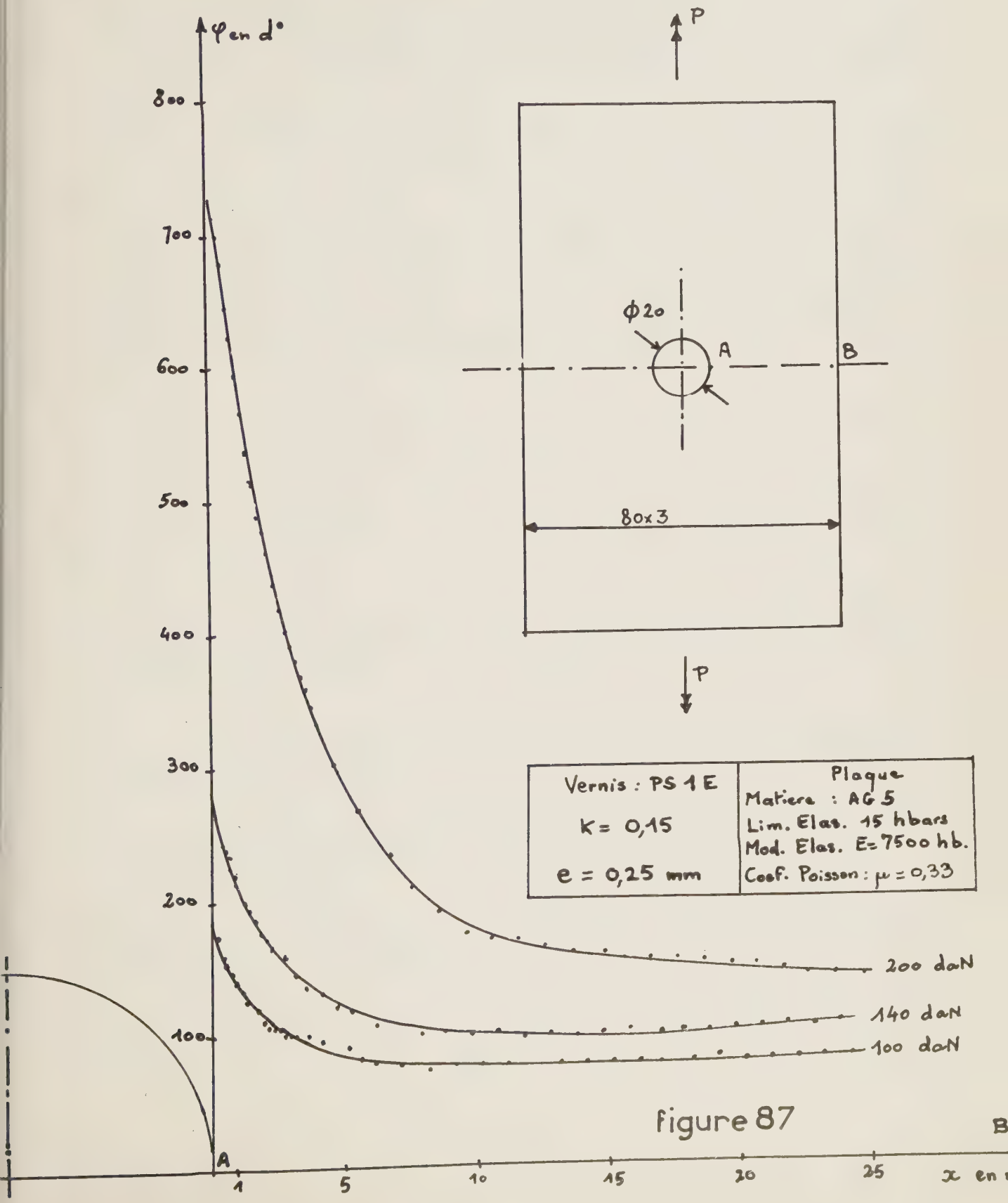


figure 87

Un second essai a consisté à étudier le déphasage le long d'un axe de symétrie d'une plaque plane percée d'un trou circulaire (voir figure 87) (l'essai est similaire à celui décrit au paragraphe V.3.1.).

Les résultats expérimentaux sont portés sur la figure 87.

Nous n'avons pas cherché par cet essai à retrouver des résultats théoriques mais plutôt à déterminer le résolution spatiale et la sensibilité de l'appareil. Dans la région où le gradient de biréfringence est élevé la résolution est de 0,1 mm. Les mesures semblent correctes jusqu'à 0,5 mm des bords du vernis.

V.3.2.4. Conclusion sur les essais

Des essais décrits précédemment nous pouvons dégager les enseignements suivants :

a) Il est possible en utilisant le photoélasticimètre par réflexion diffuse d'effectuer des mesures correctes avec des vernis photoélastiques vendus dans le commerce.

b) la précision des mesures à nettement été améliorée en utilisant cette méthode.

Elle n'est limitée que par la bonne connaissance des valeurs des constantes et non pas par l'appareil de mesure.

c) l'influence des contraintes résiduelles ne se fait sentir qu'à faible chargement.

.../

V.4. Conclusions sur le photoélasticimètre par réflexion

A la suite des résultats obtenus, nous avons réalisé un ensemble mécanique regroupant le laser et le système de détection sur la même platine. L'appareil est fixé sur un pied photographique permettant d'effectuer tous les réglages de position de l'ensemble de mesure par rapport à l'éprouvette à tester.

Rappelons que dans sa réalisation actuelle la détectivité du polarimètre est du millième de frange et qu'il est possible de faire une mesure de contrainte avec une précision absolue de ± 5%.

La méthode préconisée présente de nombreux avantages. Citons par exemple :

- la grande sensibilité du détecteur permettant l'emploi de vernis minces d'où une perturbation minime de la grandeur à mesurer.

- l'emploi d'un laser favorise la résolution spatiale (0,1 mm) ce qui permet de tracer des cartes précises des contraintes.

- l'absence de liaison mécanique entre l'éprouvette et le détecteur offre une possibilité d'étude de pièces en mouvement.

Toutefois, beaucoup d'éléments sont susceptibles d'améliorations afin d'augmenter la détectivité et la largeur de bande de l'appareil (meilleure adaptation du photomultiplicateur à sa tâche; étude de l'influence de la dimension des grains diffusants du vernis par exemple).

La méthode de mesure des contraintes que nous proposons semble donc exploitable. Cependant, on est certainement loin des limites absolues du procédé et tout progrès ultérieur dans les condi-

.../

tions matérielles de réalisation permettrait d'en améliorer les performances.

Mais dès à présent, l'appareillage existant permettrait de faire des investigations dans des branches non exploitées de l'élasticité.

Citons par exemple l'étude des déformations plastiques, c'est à dire la mesure des contraintes de surface de matériaux ayant dépassé la limite élastique, l'étude des matériaux en vibration dans lesquels se propagent des ondes de contraintes, l'étude des écoulements dans les fluides et plus particulièrement ceux des couches limites, etc...

Toutes ces investigations permettront de définir la meilleure approche théorique pour l'étude de ces matériaux, ce qui est d'une très grande importance pour la fiabilité des constructions réalisées.

.../

VI. CONCLUSIONS GENERALES

Nous venons de parcourir le domaine, déjà vaste, de la photoélasticimétrie et il apparait que beaucoup de méthodes différentes sont en compétition. En guise de conclusion, nous comparerons les diverses méthodes existantes et essaierons de voir quelles sont celles qui sont susceptibles de déboucher sur des systèmes encore plus performants que ceux existant actuellement.

Classons tout d'abord "hors concours" le photoélasticimètre tridimensionnel qui n'a pas actuellement de concurrent. Signalons cependant qu'il semble possible d'automatiser et de dynamiser cet appareil afin de faire des mesures d'objets non figés.

Classons ensuite les photoélasticimètres bidimensionnels, par réflexion ou transmission. Il apparait deux familles d'appareils :

- celle qui examine les franges
- celle qui effectue des mesures ponctuelles.

L'une a une vue d'ensemble et l'autre la précision. L'une pourra mémoriser, en holographie dynamique avec des temps de pose très brefs, l'état de contraintes d'un ensemble à un instant donné; l'autre sera capable de mesurer en un point l'évolution dans le temps avec des bandes passantes de l'ordre du Mégahertz. Bref, ces deux ensembles de méthodes sont complémentaires et c'est à l'utilisateur de juger si dans un cas particulier, l'une ou l'autre est préférable.

Parmi les méthodes "à franges", celles donnant isopaches et isochromes sont à retenir par rapport à celles ne donnant qu'un seul système de franges. Ensuite, l'utilisateur préférera celles

.../

qui utilisent un seul modèle pour obtenir les deux systèmes de franges. Les utilisateurs sont gênés quand les isopaches sont mêlées aux isochromes. C'est pour cela que nous avons cherché un moyen de les obtenir séparément à partir du même modèle.

Parmi les méthodes polarimétriques, il n'y a pas de choix à faire, car chaque appareil a une fonction définie indépendante des autres. Mais il en manquait un permettant les mesures sur objets réels. C'est pour cela que nous avons réalisé le photoélasticimètre par réflexion.

Nous avons essayé de réunir dans un tableau comparatif les diverses méthodes existantes ou encore à l'étude en France à ce jour. Il permet de voir dans quel sens se tourne la recherche actuelle et d'entrevoir quels sont les domaines inexplorés de la résistance des matériaux que pourront atteindre les mesures (voir plus loin).

Le travail que je viens de présenter ayant abouti à des résultats expérimentaux conformes à la théorie tant en polarimétrie tensorielle qu'en holographie, il m'a été possible d'en retirer des enseignements particuliers dont la somme permet, pour la première fois, d'envisager une synthèse strictement représentative des deux techniques et de leurs qualités respectives.

Cette méthode originale va faire l'objet de travaux théoriques et expérimentaux dont j'espère pouvoir présenter les résultats dans un délai d'environs deux ans.

Elle comporte l'enregistrement simultané par holographie, sur toute la surface de l'objet, des informations suivantes :

- Somme des contraintes principales avec une précision du centième de frange.
- Différence des contraintes principales, avec une précision du centième de frange également.

.../

- Direction des contraintes principales, avec une précision de l'ordre du demi-degré.

Le dépouillement de ces trois informations peut être entièrement digital. Il se fait point par point avec le pas désiré et il permet la séparation automatique des contraintes.

On peut envisager également le tracé automatique des isostatiques au moyen d'un petit traceur de courbe associé à un calculateur. Enfin, cette méthode permettra l'enregistrement dynamique, avec une précision du même ordre de grandeur, des contraintes sur toute la surface d'un objet plan, jusqu'à des fréquences de quelques dizaines de hertz, ou de figer les contraintes sur toute une surface avec des temps de pose de l'ordre de quelques nanosecondes.

TABLEAU COMPARATIF DES DIVER

Méthode	Paramètres mesurés	Précision (franges)	Analyse
3 Dimensions Robert (1)	$n_1 - n_2$ $n_2 - n_3$ $n_1 - n_3$ α_1 α_2 α_3 x, y, z	1/1000e de frange 0,5 0,1 mm	Point par point
2 Dimensions Robert transmission (2)	$n_1 - n_2$ α x, y	1/1000e de frange 0,5 0,1 mm	Point par point
2 Dimensions Robert Réflexion (3)	$n_1 - n_2$ α x, y	1/1000e de frange 0,5	Point par point
Holographie transmission ONERA (4)	$\delta z/z$ x, y	1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie Réflexion ONERA (5)	$\delta z/z$ x, y	1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie transmission Besançon (6)	$n_1 - n_2$ $n_1 + n_2$ $n_1 - n_2$ x, y	1/4 de frange 1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie extensométrique Besançon (7)	dx, dy, dz $\frac{\delta x}{x}$, $\frac{\delta y}{y}$	10 % sur déplacements de quelques microns	Enregistrem d'ensemble analyse po par point

Bande passante	Mesure affichage	Remarques
Statique	Digital	3 Dimensions Maquette photo-élastique.
Statique (20 Hz en 1 point)	Digital	2 Dimensions Maquette photo-élastique
Statique (20 Hz en 1 point)	Digital	2 Dimensions Contraintes de surfaces de matériaux réels. Résine photo-élastique.
Statique	Analogique	2 Dimensions, maquette non photo-élastique temps de pose: quelques 0,1 s
Statique	Analogique	2 Dimensions, contraintes de surfaces de matériaux réels. temps de pose: quelques 0,1 s
Statique	Analogique	2 Dimensions, maquette photo-élastique temps de pose: quelques secondes
Statique (15 Hz)	Analogique	2 Dimensions, mesure de déplacements et contraintes de surfaces sur <u>objets réels</u> temps de pose: quelques secondes (+ calculateur).

TABLEAU COMPARATIF DES DIVERS

Photo-élasticimètre Dynamique Robert (8)	$n_1 - n_2$ α x, y	5/100e de frange 5° 50	Point par point
Holographie dynamique par transmission ONERA (9)	δ z/z x, y	1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie par réflexion ONERA (10)	δ z/z x, y	1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie dynamique Besançon (11)	$n_1 - n_2$ $n_1 + n_2$) $n_1 - n_2$) x, y	1/4 de frange 1/4 de frange sur les franges	Vue d'ensem
Holographie dynamique Besançon (12)	dx, dy, dz $\frac{\delta x}{x}$, $\frac{\delta y}{y}$	10 %	Enregistrem Vue d'ensem Point par point
Méthodes de calcul (13)	Connaissant 2 paramètres et les conditions aux limit		
Isoclines par polarisation (14)	α x, y	1° sur les franges	1 vue d'ens ble par dir tion
Interférométrie et Moirés (15)	$n_1 - n_2$ δ z/z	1/4 de frange 1/4 de frange	Vue d'ensem

100 Kz puis 1 MHz en 1 point	Digital ou analogique	2 Dimensions - transmission ou réflexion Maquette photo-élastique.
Quelques 10 ns de temps de pose pour 1 vue d'ensemble	Analogique	2 Dimensions - Maquette non photo élastique figeage des contraintes
Quelques 10 ns pour 1 vue d'ensemble	Analogique	2 Dimensions - objets réels extensiométrie
0,5 µs de temps de pose 10^3 images successives à 1MHz	Analogique	2 Dimensions - transmission Maquette photo-élastique
0,5 µs de temps de pose 10^3 images à 1 MHz	Analogique	Réflexion diffuse sur objets réels par extensométrie (+ calculateur)
on calcule le 3ème (2 dimensions)		
Statique	Analogique	tracés graphiques, maquettes photoélastiques
Statique	Analogique	2 Dimensions Maquette photo-élastique de précision utilise un interféromètre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROBERT A. - Polarimètrie et Photoélasticimétrie (1970) Cours de l'E.N.S.T.A.

[2] MONNERET J. - Exploitation des systèmes d'interférences observables en interférométrie holographique d'objets diffusants. Congrès d'Holographie, Besançon, Juillet (1970)

[4] POST D. - Photoelastic evaluation of individual principal stresses by large field absolute retardation measurements. Proc. of the Soc. for exp. stress analysis 2,13, 119-132 (1956)

[4] GABOR D. - A New Microscopic Principle, Nature, 161, 777-778 (1948)

[5] LEITH E.N. and UPATNICKS J. - Reconstructed wavefronts and communication theory, J. Opt.Soc.Am., 52, 1123 (1962)

[6] LEITH E.N. and UPATNICKS J. - Wavefront reconstruction with continuous Tone Objects, J.Opt.Soc.Am, 53, 1377 (1963)

[7] HORMAN M.H., An application of wavefront Reconstruction to interferometry - App.Opt. 4, 3, 333 (1965)

[8] TAYLOR, BOWMAN, NATH, SWINSON, Applications of lasers to photoelasticity - Exp.Mechanics, 6, 6, 289-296 (1966)

[9] FAVRE H., Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures - Rev.d'Opt. 8, 193-213, 241-261, 289-307 (1929)

[10] FABRY C., Sur une nouvelle méthode pour l'analyse expérimentale des tensions élastiques Compt.Rendu 190, 457-460 (1930)

[11] BRAHTZ J.H.A. et SOEHRENS J.E. Direct Optical Measurement of individual Principal Stress. J.of.Appl. Physics, 10, 242-247 (1939)

[12] CAULFIELD H.J. and BEYEN W.J. Biréfringent Beam Splitting for Holography Rev.Scient. Instruments (1967) 38 p. 977

[13] STROKE G.W. An introduction to coherent optics and holography (1966) Acad. Press N.Y.

[14] DUFFIEUX P.M. L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique - Faculté des Sciences - Besançon (1958)

[15] MARQUET M., ROYER M., Les hologrammes (1965) Inst. d'Optique de PARIS

[16] LOWENTHAL S. et BELVAUX Y., Revue d'Optique (1967) 46, 1

[17] MARECHAL A., et FRANÇON M., Revue d'Optique (1960)

[18] VIENOT J.Ch. et BULABOIS J., Revue d'Optique (1965) 44, 621

[19] MARQUET M., et al. Revue d'Optique (1966), 45, 501

[20] HAINES A.A. et al. Appl. Optics, 1966, 5, 595

[21] HAINES A.A. et al. Appl. Optics 1966, 5, 172

[22] VIENOT J.Ch. et MONNERET J., Revue d'Optique, 1967, 46, 75

[23] HAINES R. et HILDEBRAND, Phys. Letters, 1965, 19, 10

[24] BARNETT, N.E., Appl. Optics, 7, 202 (1968)

[25] STETSON K.A., Appl. Optics, 7, 987 (1968)

[26] ZELENKA J.S. et al., Appl. Optics, 7, 2107, (1968)

[27] ITOH Y. et al., Jap. J. Appl.Phys., 7, 904 (1968)

[28] VIENOT J.Ch., FROEHLY C., MONNERET J., PASTEUR J., Proc.Symp. of Glasgow, Sept. 1968, ed. by t.R Robertson et J.M.Harvey, Cambridge University Prss, pp. 133-150

[29] VIENOT J.Ch. Essais d'interprétation quantitative des hologrammes dans l'étude des contraintes, Nell. Revue d'Opt. App.1 n°2, pp 73-88 (1970)

[30] POINCARE H. Théorie mathématique de la lumière - Gauthier Villars (1889)

[31] SHURCLIFF W.A., Polarised light, Production an Ase, Havard University Press (1962)

[32] ROBERT A., et VERNET J.L., Conf. Troisième Congrés Int. d'Analyse des contraintes - Berlin (1966)

[33] ROBERT A., Int. J. Solids Structures (1970) 6, Pergasson Press

[34] NICOLAS J., Rev. Française de Mécanique 28 (1969)

[35] NISIDA et SAITO Exp. Mech. S.E.S.A. 1 n°2 (1964)

[36] FROCHT M.M., Photoélasticity Tome 1 John wiley and sons, N.Y. (1948)

[37] de BAZELAIRE E. et PRADE B., Application de l'Holographie et de la Polarimétrie Tensorielle à la détermination des valeurs des contraintes principales - C.R.A.S. Paris, τ.271, p.25-27 (6 Juillet 1970) série B

[38] de BAZELAIRE E. et PRADE B., Application de l'Holographie et des formes de lumière à la séparation des contraintes, Com. au Symposium des Applications de l'Holographie, 5-6, Besançon (Juillet 1970)

[39] de BAZELAIRE E. et PRADE B., Etude de l'Operateur de réflexion - transmission Application à la photoélasticimétrie. C.R. Final contrat DRME 660/68 (2 Mars 1970)

ERVICE DE LA SCOLARITE
u des Enseignements du 3e Cycle
l. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : DOCTEUR INGENIEUR

THESE DE :

NOM : Monsieur DE BAZELAIRE

Prénoms : Eric

né le 9/II 19 42 à TOULON Dép^{t} : VAR

1ère THESE : "Photoélasticimétrie par holographie et polarimétrie."

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :

PRESIDENT : M. FRANCON

EXAMINATEURS : BLAMONT
M. VIENOT

MEMBRE INVITE : M. TEISSIER DU CROS

Vu et Approuvé

PARIS, le 12 juin 1972

Le Président

de l'Université de PARIS VI

Académie de Paris

UNIVERSITE de PARIS VI
, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE